K. STUMPFF

GEOGRAPHISCHE ORTSBESTIMMUNGEN

DIE METHODEN DER ORTS- UND ZEITBESTIMMUNG
DURCH BEOBACHTUNG DER GESTIRNE

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

KARL STUMPFF

GEOGRAPHISCHE ORTSBESTIMMUNGEN

PAUL HARZER

(1857—1932)

ZUM GEDÄCHTNIS



HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK
HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE
BAND 18

GEOGRAPHISCHE ORTSBESTIMMUNGEN

DIE METHODEN DER ORTS- UND ZEITBESTIMMUNG DURCH BEOBACHTUNG DER GESTIRNE

von

KARL STUMPFF
Dr. phil., a.o. Universitätsprofessor i. R.,
Lehrbeauftragtem für Astronomie an der Universität Göttingen

Mit 58 Abbildungen

1955
VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN

Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206.435/441/54
Satz und Druck: VEB Druckerei der Werktätigen, Halle (Saale)

VORWORT

Die Lehre von den *Geographischen Ortsbestimmungen* (Orts- und Zeitbestimmungen auf Grund astronomischer Beobachtungen) bildet einen wichtigen Abschnitt der *Sphärischen Astronomie* und handelt von den Anwendungen dieser Wissenschaft auf die Probleme der räumlich-zeitlichen Orientierung des Menschen auf der Erdoberfläche. Die Methoden der Geographischen Ortsbestimmung werden daher in allen einschlägigen Lehrbüchern der Sphärischen Astronomie mehr oder weniger ausführlich mitbehandelt, keineswegs aber in der Vollständigkeit, die sie verdienen. Die Werke, die das Problem der Ortsbestimmung als Hauptthema behandeln, sind mit wenigen Ausnahmen, auf die ich noch zurückkomme, älteren Datums und enthalten daher viele Gesichtspunkte und Methoden nicht, die sich erst in neuerer Zeit ergeben haben.

Auf der Universität wird der Gegenstand der Geographischen Ortsbestimmung vielfach von dem allgemeineren der Sphärischen Astronomie getrennt und in besonderen Vorlesungen behandelt. Ich selbst habe es in meinen astronomischen Vorlesungen in Breslau, Berlin, Graz und Göttingen immer so gehalten und mich auf diese Weise bemüht, dem Studierenden eine möglichst vollständige und geschlossene Übersicht über die äußerst vielgestaltigen Mittel und Wege der astronomischen Orientierung nach den Gestirnen zu geben.

Gewiß sind diese Dinge von größtem praktischem Nutzen und bilden eine der wissenschaftlichen Grundlagen für die Kunst der Erdvermessung (Geodäsie) sowie ein unentbehrliches Hilfsmittel für die Seefahrt (Nautik) und den Forschungsreisenden. Darüber hinaus aber vermittelt die Beschäftigung mit den Aufgaben der Orts- und Zeitbestimmung jenes tiefere, auf lebendige Anschauung gegründete Verständnis der Bewegungsvorgänge an der scheinbaren Himmelskugel, das dem Studierenden — und nicht allein dem der Astronomie — zur Festigung der Fundamente seines makrokosmischen Weltbildes so nötig ist. Sie regt zu eigenen Beobachtungen und Messungen an, die — wie gezeigt werden wird — nicht nur mit Präzisionsinstrumenten, sondern auch mit bloßem Auge und ganz einfachen Hilfsmitteln ausgeführt werden können. Sie ist auch für den jungen Mathematiker eine wertvolle Schule der Sphärischen Trigonometrie und ihrer Anwendungsmöglichkeiten, und sie liefert dem Astronomen eine reiche Fundgrube rechnerischer Methoden und Kunstgriffe, auf die er auch bei der Bewältigung andersartiger Aufgaben seines großen Forschungsgebietes gern und mit Vorteil zurückgreifen wird.

Das vorliegende Buch, das gerade von diesen Gesichtspunkten aus geschrieben wurde, baut sich auf den oben erwähnten Vorlesungen auf. Diesen aber habe ich stets die unschätzbaren Anregungen und Vorbilder zugrunde

gelegt, die ich im Sommer 1919 auf der Universität Kiel aus den Vorlesungen meines hochgeschätzten und unvergessenen Lehrers PAUL HARZER nach Hause tragen durfte. HARZER hat es immer verstanden, statt auf ausgetretenen Pfaden zu wandeln, den Gegenstand, den er lehrte, mit eigenem Geiste zu erfüllen, und so finden wir auch kaum eine Methode der Geographischen Ortsbestimmung, bei deren Lösung er nicht neue Wege erfolgreich versucht hätte. Seine zahlreichen Arbeiten auf diesem Gebiete finden sich in der Literatur weit verstreut, und ich habe es mir zur Aufgabe gemacht, sie zu sammeln und in diesem Buche mit den klassischen Methoden zu einer Ganzheit zu vereinigen. Dabei konnte ich auch einige Einzelheiten berücksichtigen, die HARZER nicht mehr veröffentlicht hat und die sonst wohl der Vergessenheit anheimgefallen wären. Andererseits gelang es mir in einzelnen Fällen, die HARZERschen Lösungen, die immer mathematisch elegant und von schöner Symmetrie erfüllt, aber mitunter für einen weniger geübten Rechner als ihn selbst reichlich unbequem waren, nach eigenen Methoden umzugestalten und so dem Praktiker schmackhaft zu machen. Das geschah vor allem bei den Methoden der simultanen Bestimmung von Polhöhe und Sternzeit aus drei relativen Zenitdistanzen, Azimuten oder parallaktischen Winkeln (Abschnitte 48, 52, 55).

Der zur Verfügung stehende Raum gebot in der Anlage des Buches eine gewisse Beschränkung, deren Maß nicht immer leicht zu finden war. In den Universitätsvorlesungen geht gewöhnlich den Geographischen Ortsbestimmungen die allgemeine Vorlesung über Sphärische Astronomie voran, so daß die Kenntnis dieses Gebietes vorausgesetzt werden kann. Um nicht die Geschlossenheit des Lehrbuches zu gefährden, durfte ich diese Voraussetzung hier nicht gelten lassen. So habe ich in den ersten beiden Kapiteln wenigstens diejenigen Dinge aus der Sphärischen Astronomie vorangeschickt, die zum Verständnis der übrigen unentbehrlich sind. Es kann also auch derjenige sich ohne Schwierigkeit in das Buch hineinlesen, dem die Grundlage der Sphärischen Astronomie noch fehlt, andererseits wird auch ein Leser, der solche Kenntnisse schon besitzt, eine kurze und immer auf die eigentlichen Zwecke des Buches ausgerichtete Zusammenfassung dieser Voraussetzungen nicht als überflüssig empfinden.

Die folgenden fünf Kapitel beschäftigen sich dann mit den Methoden der Zeitbestimmung, der Polhöhenbestimmung, der simultanen Bestimmung von Zeit und Polhöhe, der Bestimmung der geographischen Länge und schließlich mit der Ortsbestimmung im Polargebiet. Ich habe Wert darauf gelegt, von der Vielgestalt dieser Probleme und Methoden ein möglichst vollständiges und abgerundetes Bild zu entwerfen, wenn natürlich auch bei weitem nicht alles berücksichtigt werden konnte, was in der umfangreichen Literatur auf diesem Gebiete zu finden ist. Diese Ganzheit ist ohne Überschreitung des gebotenen Raumes nur durch Opfer an anderer Stelle möglich gewesen. So mußte ich auf eine ausführliche Beschreibung der den Zwecken der Ortsbestimmung dienenden Instrumente und ihrer Handhabung verzichten und mich auf eine kurzgefaßte Theorie der Geräte beschränken, die auf See- und Landreisen fast ausschließlich benutzt werden, des

Sextanten und des *Universalinstruments.* Auch die Theorie des Passageinstruments bei Zeitbestimmungen im Meridian habe ich ihrer besonderen Wichtigkeit halber nicht übergehen zu dürfen geglaubt. Ferner habe ich die Wiedergabe von konkreten Rechenbeispielen ganz unterlassen und die Zahl der Tabellen (Anhang F) auf ein Mindestmaß beschränkt. Der letztere Verzicht fiel am wenigsten schwer, da an Tafelwerken zum Gebrauch bei Geographischen Ortsbestimmungen kein Mangel ist — ich erinnere nur an die von ALBRECHT, AMBRONN-DOMKE und WIRTZ. So habe ich mich mit einigen Täfelchen begnügen können, die weniger dem praktischen Gebrauch als einer zahlenmäßigen Orientierung und Veranschaulichung dienen sollen. Im übrigen enthält der Anhang eine Zusammenstellung von elementaren mathematischen Hilfsmitteln, teils ohne Beweis (z. B. die wohlbekannten Formeln der Sphärischen Trigonometrie), teils mit ausführlicher Begründung, wie gewisse Sätze, die öfter gebraucht werden und mit deren Beweisen ich den Text nicht belasten wollte.

Ich glaube nicht, daß dieses kleine Lehrbuch mit den übrigen deutschsprachigen Veröffentlichungen dieser Art ernsthaft kollidieren wird. Von neueren Büchern auf diesem Gebiet sind mir zwei bekannt geworden — die dritte Auflage des zuerst 1912 erschienenen „Grundrisses der Geographischen Ortsbestimmung“ von K. GRAFF (Berlin 1944) und „Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung“ von TH. NIETHAMMER (Basel 1947). Das erstere gibt eine sehr gründliche Anleitung für Beobachter mit kleineren Instrumenten, deren Handhabung und Eigenschaften weit ausführlicher beschrieben werden, als es hier angängig war — andererseits bringt GRAFF nur die wichtigsten und einfachsten Methoden, die in Nautik, Geodäsie und auf Forschungsreisen seit langem üblich und erprobt sind. Das NIETHAMMERsche Werk, das mir erst nach Abschluß des Manuskripts zugänglich wurde, beschränkt sich auf die Behandlung einer kleinen Auswahl von Methoden höchster Präzision; diese allerdings werden mit ungewöhnlicher Gründlichkeit und unter Berücksichtigung aller instrumentellen, technischen und fehlertheoretischen Gesichtspunkte dargestellt. Es setzt bereits ziemlich viele astronomischen Kenntnisse und Einsichten voraus und wendet sich daher weniger an den studierenden Anfänger als an den gewiegten Praktiker. Beide Bücher erstreben also andere Ziele als das vorliegende, das eine breite Lücke zwischen ihnen ausfüllt und andererseits von ihnen auf das beste ergänzt wird.

K. Stumpff

INHALTSVERZEICHNIS

IV. Kapitel: Bestimmung der Polhöhe des Beobachtungsorts bei bekannter Zeit

V. Kapitel: Gleichzeitige Bestimmung von Ortszeit und Polhöhe aus kombinierten Beobachtungen

VI. Kapitel: Bestimmung der geographischen Länge

I. KAPITEL

EINFÜHRUNG IN DAS PROBLEM DER GEOGRAPHISCHEN ORTSBESTIMMUNG. REDUKTION DER BEOBACHTUNGEN

1. Terrestrische und astronomische Orientierung

Unsere Erde hat, wenn wir von den Unregelmäßigkeiten ihrer Oberflächengestaltung absehen, die Form eines schwach abgeplatteten Rotationsellipsoids. Um die Lage beliebiger Punkte ihrer Oberfläche beschreiben zu können, bedient man sich des wohlbekannten Koordinatensystems der Längen- und Breitenkreise, über dessen Einrichtung hier keine besondere Erläuterung notwendig ist. Alle festen Merkmale, die wir auf der Erdoberfläche vorfinden, lassen sich in dieses Netz eintragen und so zu übersichtlichen Darstellungen (Landkarten) vereinigen.

Soweit solche Karten vorhanden sind und die erforderliche Genauigkeit und Vollständigkeit aufweisen, bereitet die Orientierung nach terrestrischen Merkmalen keine Schwierigkeit. In den kultivierten Gegenden der Erde ist diese Voraussetzung bereits erfüllt. Anders ist es auf dem offenen Meere, das gestaltlos ist, und in entlegenen, unbewohnten oder schwer zugänglichen Gebieten des Festlandes. Der Seemann, der die Meere befährt, oder der Forschungsreisende, der Wüsten, Steppen, weglose Urwälder oder die Eisregionen der Polargebiete besucht, wird daher in der Regel genötigt sein, sich anderer Orientierungsmittel zu bedienen.

Bis zu einem gewissen Grade kommt man auch in diesen Fällen mit terrestrischen Hilfsmitteln der Ortsbestimmung aus. Der Reisende, der von einem auf den Karten noch bezeichneten Stützpunkt aus in unbekanntes Gelände vordringt, kann seinen Weg unter Kontrolle halten, indem er Marschrichtung und Marschgeschwindigkeit fortlaufend beobachtet und aufzeichnet. Auch der Seemann bedient sich dieses Verfahrens. Die Fahrtrichtung (den Kurs) seines Schiffes bestimmt er mit dem *Kompaß*, die Geschwindigkeit mit einem dazu geeigneten Gerät, der *Logge*. Die Logge besteht der Hauptsache nach aus einer offenen Röhre, in der sich eine Flügelschraube mit Umdrehungszählwerk bewegt. Bringt man diese Röhre in der Fahrtrichtung ins Wasser, so wird sie von diesem durchströmt; die Umdrehungsgeschwindigkeit der Schraube ist dann der Schiffsgeschwindigkeit proportional. In der Nautik wird diese Methode der Ortsbestimmung durch Fortschreiben von Kurs und Geschwindigkeit als *Gissen* (engl. to guess = mutmaßen, schätzen) bezeichnet. Der auf diese Weise ermittelte Schiffsort heißt der *gegißte Ort*.

Es ist klar, daß die Unsicherheit des Gissens mit der Länge des seit der Ausfahrt aus dem Hafen bzw. seit der letzten genauen Ortsbestimmung zurückgelegten Weges stark zunimmt. Der Seemann wie der Forschungs-

reisende zu Lande wird daher bemüht sein, den gegißten Standort von Zeit zu Zeit durch andere Methoden der Ortsbestimmung zu kontrollieren und nach Möglichkeit zu berichtigen. Dazu dient vor allem die Orientierung nach den Gestirnen des Himmels, deren mannigfache und vielgestaltige Möglichkeiten den Inhalt dieses Buches ausfüllen sollen. Sie haben vor der Methode des Gissens den Vorteil, *absolute* Örter zu liefern, d. h., von der Kenntnis des Ausgangspunktes und des Verlaufes der Reise unabhängig zu sein. Ihr Nachteil besteht darin, daß sie ohne besondere Hilfsmittel (Beobachtungsinstrumente, Uhren, astronomische oder nautische Jahrbücher) nicht durchgeführt werden können und daß die Beobachtung der Gestirne häufig durch Bewölkung des Himmels unmöglich gemacht wird. In noch gar nicht weit zurückliegender Zeit waren langanhaltende Schlechtwetterperioden, die astronomische Ortsbestimmungen verhinderten, für die Seefahrt nicht ungefährlich. Heute hat die Ausbildung der *Funktechnik*, die eine Orientierung durch den Empfang von Radiowellen (Funkpeilung, Zeitzeichen) gestattet, die Bedeutung der astronomischen Beobachtungen für die Schiffahrt etwas zurückgedrängt. In weit höherem Maße gilt das für die Luftfahrt, in der die astronomischen Methoden niemals eine große Rolle gespielt haben.

Mit den praktischen Bedürfnissen der Schiffahrt und der Forschungsreisen erschöpft sich die Bedeutung der geographischen Ortsbestimmungsmethoden durch astronomische Beobachtung keineswegs. Während für diese Zwecke meist eine mäßige Genauigkeit ausreichend ist und daher primitive Methoden und einfache Instrumente mit verhältnismäßig geringer Meßgenauigkeit bevorzugt werden, erfordern die Aufgaben der *Astronomie* und der *Geodäsie* exakte Methoden der Ortsbestimmung, leistungsfähige Instrumente und Beobachtungen von höchster Präzision.

Jede Sternwarte, auf der exakte astronomische Beobachtungen ausgeführt werden, bedarf der genauesten Kenntnis ihrer geographischen Lage. Die Bestimmung der geographischen Koordinaten geschieht dort mit Hilfe besonderer fest aufgestellter Instrumente (Meridiankreise, Passageinstrumente, Vertikalkreise, Zenitteleskope u. a.) und mit einer Genauigkeit, die mit geringeren Hilfsmitteln nicht erzielt werden könnte. Da die Gestirne, die als räumliche Orientierungsmarken bei der Ortsbestimmung benutzt werden, infolge der Rotation der Erde eine scheinbare Bewegung ausführen, ist jede astronomische Ortsbestimmung zwangsläufig mit der Kenntnis bzw. der Bestimmung der *Zeit* verbunden. Die Sternwarten sind daher auch mit sehr genau gehenden *Uhren* ausgerüstet, deren Gang durch astronomische Zeitbestimmungen so oft wie möglich kontrolliert werden muß. Von manchen Sternwarten wird die Zeit regelmäßig durch Rundfunksignale weitergegeben. Wir werden später sehen, daß durch diese Einrichtung die Bestimmung der *geographischen Länge*, die sonst zu den schwierigsten Aufgaben der Ortsbestimmung gehört, außerordentlich erleichtert wird.

Die Sicherheit, mit der die geographischen Koordinaten der Sternwarten im allgemeinen bekannt sind, ist außerordentlich groß; man kann annehmen, daß diese Größen bis auf ein Zehntel, häufig sogar bis auf ein Hundertstel der Bogensekunde genau sind. Da eine Bogensekunde auf der Oberfläche

einer Kugel den 206265. Teil des Halbmessers bedeutet und der mittlere Halbmesser der Erde rund 6370 km beträgt, so entspricht auf der Erdoberfläche eine Bogensekunde einer Strecke von rund 31 m. Der Ort des Instruments, mit dem die Ortsbestimmung der Sternwarte ausgeführt wurde, ist also bis auf wenige Meter oder gar Dezimeter festgelegt — allerdings unter der nicht zutreffenden Voraussetzung, daß die Erdoberfläche genau die Form eines Rotationsellipsoids hat.

Die *Geodäsie*, deren praktische Hauptaufgabe die Vermessung der Erdoberfläche ist, kann sich auf die Sternwarten als Fundamentalpunkte für solche Vermessungsarbeiten stützen. Da aber diese Punkte meist sehr weit auseinanderliegen, in manchen Gebieten auch spärlich oder gar nicht vertreten sind, verschaffen sich die Geodäten daneben ein dichteres Netz von Stützpunkten, deren Örter gleichfalls astronomisch, aber mit kleineren transportablen Geräten (Universalinstrumenten oder Passageinstrumenten) bestimmt werden. Die angestrebte Genauigkeit ist hier entsprechend geringer, aber immer noch bedeutend. Zwischen diesen Stützpunkten wird die weitere Vermessung des Geländes mit rein terrestrischen Mitteln (Triangulation, Nivellement) durchgeführt, die uns hier nicht zu beschäftigen brauchen.

Die Genauigkeitsansprüche bei der Ortsbestimmung auf See (und meist auch bei Forschungsreisen zu Lande, falls diese nicht gerade Vermessungszwecken dienen) sind erheblich bescheidener. Auf See ist dies schon deswegen unvermeidlich, weil der schwankende Boden des Schiffes die feste Aufstellung von Beobachtungsinstrumenten nicht gestattet und der Seemann daher auf Geräte angewiesen ist, die er während der Beobachtung frei in der Hand hält (Sextanten, Quadranten, Spiegelkreise). Sie gestatten meist eine Meßgenauigkeit von 10—20 Bogensekunden, die aber nur selten ausgenutzt wird. Die Festlegung des Schiffsortes auf den Bereich einer *Seemeile* (1 Sm = 1,85 km = 1 Bogenminute auf der Erdoberfläche) ist auf hoher See meist völlig ausreichend.

Auch bei Expeditionen auf dem Lande ist der Reisende in den meisten Fällen auf kleine Instrumente zur Ortsbestimmung angewiesen. Oft verbietet sich auch die Mitnahme von Präzisionsuhren, z. B. von Schiffschronometern mit kardanischer Aufhängung, wie sie auf Seereisen gebräuchlich sind, da diese empfindlichen Instrumente die Erschütterungen während eines Transportes zu Lande schlecht vertragen. Man wird sich in diesem Falle mit einer guten Taschenuhr behelfen. Für Notfälle gibt es auch primitive Methoden der astronomischen Orientierung, die mit ganz einfachen Hilfsmitteln und (abgesehen von der unentbehrlichen Uhr) ohne Instrumente zum Ziele führen.

2. Das Blickfeld des Beobachters

Einem Beobachter im leeren Raum würde der Himmel mit seinen Gestirnen als eine Kugel erscheinen, in deren Mitte er sich selbst befindet. Auf diese Kugel, die „*Sphäre*", projizieren sich für sein Auge alle räumlichen Objekte, da ihre Entfernungen nicht bemerkbar sind und ihm daher alle gleich erscheinen. Der Halbmesser der Sphäre ist willkürlich wählbar; es ist zweckmäßig, ihn gleich der Einheit zu setzen. Die Örter der Gestirne an der

Sphäre (d. h. also ihre Projektionen auf die scheinbare Himmelskugel) unterscheiden sich also nur durch die *Richtungen*, aus denen sie dem Beobachter erscheinen. Sie lassen sich durch zwei Winkelgrößen eindeutig festlegen, wenn auf der Sphäre ein Polarkoordinatensystem definiert wird. Die dritte Koordinate, die *Entfernung* des Gestirns vom Beobachter, spielt in der Theorie der Geographischen Ortsbestimmungen nur eine untergeordnete Rolle. Wir werden daher unter dem *Ort* eines Gestirns, wenn es nicht ausdrücklich anders vermerkt ist, immer seinen *sphärischen Ort* verstehen. Von den Koordinatensystemen an der Sphäre, mit deren Hilfe die Gestirnsörter sich zahlenmäßig ausdrücken lassen, wird in späteren Abschnitten die Rede sein.

Die *Fixsterne*, deren Entfernung außerordentlich groß ist, erscheinen dem Beobachter als punktförmige Objekte bzw. infolge der Beugung des Lichtes an der Pupillenöffnung des Auges oder am Fernrohrobjektiv als Scheiben von sehr kleinem Durchmesser, so daß sie sich als Orientierungsmarken für die Ortsbestimmung am besten eignen. Die Körper des Sonnensystems dagegen zeigen eine merkliche Ausdehnung — *Sonne* und *Mond* schon für das unbewaffnete Auge, die *Planeten* beim Anblick im Fernrohr. Diese Himmelskörper sind (wenn wir von der starken Abplattung der Planeten Jupiter und Saturn absehen) von kugelförmiger Gestalt und projizieren sich daher auf die Sphäre als Kreisscheiben. In den astronomischen Jahrbüchern werden als Örter dieser Gestirne die Koordinaten ihrer Mittelpunkte angegeben, während der Beobachter mit dem Meßfaden seines Fernrohrs ihre Ränder anvisiert. Zur Reduktion der Randbeobachtungen auf den Mittelpunkt der Gestirnsscheibe ist also die Kenntnis des scheinbaren Gestirnshalbmessers notwendig, d. h. des Winkels, unter dem der Halbmesser des Himmelskörpers dem Beobachter erscheint. Ist s der lineare Halbmesser und r die Entfernung des Gestirnsmittelpunktes vom Beobachter, so ist der scheinbare Halbmesser σ durch

$$\sin \sigma = \frac{s}{r} \qquad (I;1)$$

gegeben (Abb. 1).

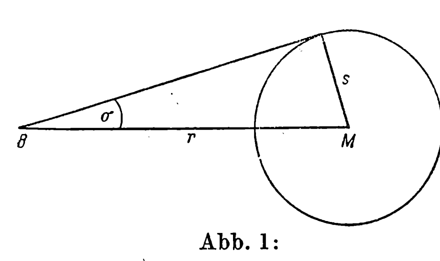


Abb. 1:
Scheinbarer Halbmesser eines Gestirns

Die scheinbaren Halbmesser von Sonne und Mond, die wegen der wechselnden Entfernung dieser Gestirne von der Erde in engen Grenzen schwanken, können für jeden Zeitpunkt aus den Jahrbüchern entnommen werden. Sie sind einander ungefähr gleich und betragen im Mittel rund 16 Bogenminuten. Die Kenntnis des scheinbaren Halbmessers ist nur dann entbehrlich, wenn der Beobachter das Gestirn als volle Kreisscheibe erblickt und deren Ausdehnung durch Beobachtung der entgegengesetzten Ränder eliminieren kann. Das ist bei der Sonne stets der Fall, beim Monde und den Planeten wegen ihrer wechselnden Beleuchtungsphasen aber nur bei voll beleuchteter Scheibe (Vollmond, Opposition, obere Konjunktion).

Nähert sich der Beobachter der Oberfläche des Himmelskörpers, so strebt r gegen s und daher σ gegen 90°. Für einen Beobachter, der sich auf der Oberfläche selbst befindet, verdeckt also das Gestirn die Hälfte der Sphäre. Demnach erscheint uns Bewohnern der Oberfläche des Planeten Erde der Rand dieses Gestirns (wenn wir die Erde einmal als Kugel mit glatter Oberfläche ansehen wollen) als ein größter Kreis, den wir als *Horizont* bezeichnen. In Wirklichkeit wird die Horizontlinie meist durch die Unebenheiten der Erdoberfläche unkenntlich gemacht. Nur auf dem offenen Meere ist sie als *Kimmlinie* direkt beobachtbar und erscheint nur geringförmig durch die Meereswellen deformiert. Hierbei muß allerdings bemerkt werden, daß die Kimm mit dem wahren Horizont nicht genau zusammenfällt, da das Auge des Beobachters immer etwas oberhalb der Erd- bzw. Meeresoberfläche angenommen werden muß.

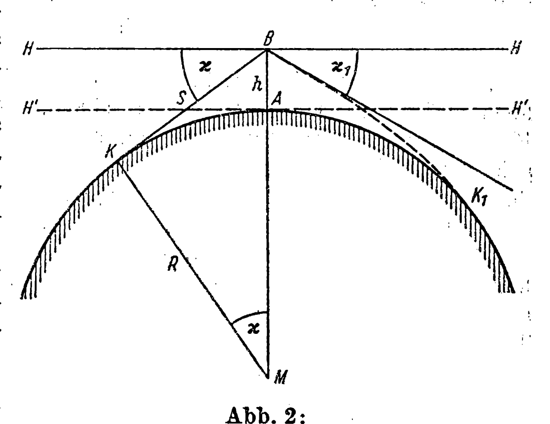


Abb. 2:
Kimmtiefe und Sichtweite

Die Abweichung zwischen Kimm und wahrem Horizont ist nicht unbeträchtlich, selbst wenn die Erhebung des Beobachtungsstandorts über dem Meeresspiegel nur wenige Meter beträgt. Es sei (Abb. 2) B das Auge des Beobachters, A der senkrecht unter ihm liegende Punkt der kugelförmigen Erde, M der Erdmittelpunkt, R der Erdradius und BK eine Tangente von B an die Meeresoberfläche. $H'H'$ versinnbildliche die Tangentialebene in A. Dann schneidet ihre Parallelebene HH durch B die Sphäre um B im wahren Horizont, während die Kimm offenbar um den Winkel $HBK = BMK = \varkappa$ unterhalb des Horizontes liegt. Ist $BA = h$ die Höhe des Standortes über dem Meeresspiegel, so bestehen zwischen der *Sichtweite* $BK = S$, der *Kimmtiefe* $\varkappa$ und R, h die Beziehungen

$$\cos\varkappa = \frac{R}{R+h}, \qquad \operatorname{tg}\varkappa = \frac{S}{R}.$$

Da $\varkappa$ ein sehr kleiner Winkel und auch das Verhältnis $\frac{h}{R}$ sehr klein ist, kann man genähert setzen

$$1 - \frac{\varkappa^2}{2} = 1 - \frac{h}{R}, \qquad \varkappa = \frac{S}{R}$$

und somit

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2h}{R}}, \qquad S = \varkappa R = \sqrt{2hR}.$$

Drückt man h in Metern aus und setzt man den mittleren Erdradius $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, so erhält man für die Kimmtiefe in Bogensekunden

$$\varkappa'' = \frac{\varkappa}{\sin 1''} = 115{,}''5 \sqrt{h} \qquad (\text{I; } 2)$$

und für die Sichtweite

$$S = 3{,}57 \sqrt{h}\,\text{km}. \qquad (\text{I; } 3)$$

Sichtweite und Kimmtiefe sind also der Wurzel aus der Höhe über dem Meeresspiegel proportional. Die Formeln (I; 2) und (I; 3) erfordern aber noch Korrekturen, da die Lichtstrahlen, die von der Kimm zum Beobachter gelangen, Luftschichten verschiedener Dichte durchlaufen und daher nach dem Gesetz der Strahlenbrechung gekrümmt werden. Die durch diese Erscheinung veränderten Verhältnisse sind, stark übertrieben, in der rechten Hälfte der Abb. 2 dargestellt. Da im allgemeinen die Luftdichte von der Meeresoberfläche nach oben abnimmt, ist der Sehstrahl BK_1 nach unten gekrümmt. Die Kimm erscheint daher dem Beobachter in der geringeren Tiefe $\varkappa_1$, während die Sichtweite vergrößert wird. Die Korrektion der Kimmtiefe, die hier allein interessiert, kann nicht streng berechnet werden, da sie von vielen — in den wenigsten Fällen übersehbaren — Umständen abhängt. Der Gradient der Luftdichte in den untersten Atmosphäreschichten ist je nach den meteorologischen Verhältnissen stark variabel. Er hängt vor allem von dem Unterschied zwischen Luft- und Wassertemperatur sowie von dem Grad der Durchmischung der unteren Luftschichten ab. Der Seemann, der seine Beobachtungen (Gestirnshöhen über dem Horizont!) gern direkt auf die Kimmlinie bezieht und der daher bei ihrer Reduktion die Kimmtiefe zu berücksichtigen hat, benutzt gewöhnlich statt (I; 2) die empirische Formel

$$\varkappa_1'' = \frac{12}{13}\varkappa'' = 106{,}''6 \sqrt{h} \qquad (\text{I; } 4)$$

für die verbesserte Kimmtiefe, die den durchschnittlichen Ergebnissen vieler Untersuchungen über den Einfluß der Strahlenbrechung am besten entspricht.

3. Das Bezugssystem des Horizontes

Wenn wir die Gestirne des Himmels als Orientierungsmarken für die Geographische Ortsbestimmung benutzen wollen, müssen wir drei Voraussetzungen erfüllen: 1. die Örter der Gestirne in ein *lokales*, d. h. mit Beobachtungsort und Erdkörper starr verbundenes Koordinatensystem einordnen, 2. die Koordinaten der Gestirne in einem *raumfesten*, d. h. mit der Gesamtheit der Fixsterne in geeigneter Weise verbundenen System bestimmen, 3. die räumlich-zeitlichen Beziehungen zwischen beiden Systemen festlegen.

Als Hauptkoordinatenebene des lokalen Systems, mit dem wir uns zuerst beschäftigen wollen und dessen Ursprung im Beobachtungsort (genauer gesagt, im Auge des Beobachters) liegt, bietet sich von selbst die Ebene des *Horizontes* dar. Wir haben gesehen, daß der größte Kreis, in dem diese

Ebene die Sphäre schneidet, der Horizont, nur auf freiem Meere (nach Berücksichtigung der Kimmtiefe) der Beobachtung direkt zugänglich ist. Diese Definition des Horizontes genügt aber höchstens den geringen Genauigkeitsansprüchen, die bei Beobachtungen mit Sextanten und ähnlichen kleineren Instrumenten gestellt werden, also allenfalls bei Ortsbestimmungen auf See, wo sie ja auch allein anwendbar ist.

Zu einer exakten Bestimmung des Begriffes der Horizontalebene reichen geometrische Hilfsmittel nicht aus. Auch die Definition der Horizontalebene als einer Tangentialebene des Erdellipsoids ist unzulänglich, da ja die Erdoberfläche in Wirklichkeit gar keine glatte und differenzierbare Figur darstellt. Diese Schwierigkeit läßt sich beseitigen, wenn man die *Schwerkraft* in Betracht zieht. *Horizontal* nennen wir die ebene Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit, die sich unter der Wirkung der Schwerkraft senkrecht zu deren Richtung einstellt. Genauer ausgedrückt: die Oberflächen ruhender Flüssigkeiten sind Niveauflächen der Schwerkraft und werden von der Richtung dieser Kraft überall senkrecht durchsetzt. Auch die Meeresoberfläche ist, wenn wir von ihrer Deformation durch Wellen, Strömungen und Gezeiten absehen, eine solche Niveaufläche. Man kann also die Horizontebene und damit den Horizont des Beobachters allgemein durch ihre Normale, die Schwerkrafts- oder *Lotrichtung*, definieren. Diese läßt sich aber immer auf einfache Weise und mit sehr großer Genauigkeit physikalisch und beobachtungstechnisch realisieren, z. B. durch Vorrichtungen wie Senklot, Wasserwaage (Libelle, Niveau) oder durch die spiegelnde Oberfläche einer mit Quecksilber gefüllten Schale (Quecksilberhorizont).

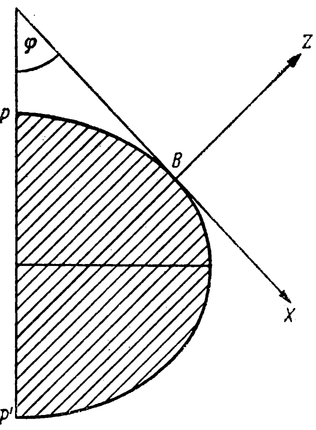


Abb. 3: Meridianschnitt des Erdellipsoids

Wir betrachten nun, was für die ferneren Überlegungen unbedenklich statthaft ist, die Erdoberfläche als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit der Achse PP' (P = Nordpol, P' = Südpol). Abb. 3 stellt denjenigen ebenen Schnitt durch diese Figur dar, der die Erdachse und den Beobachtungsort B enthält. Diese Ebene, die wir als die *Meridianebene* von B bezeichnen, enthält die Lotrichtung BZ des Beobachtungsortes und steht daher auf der Horizontebene von B senkrecht, deren Spur BX die „Meridianellipse" PBP' in B berührt.

In dem lokalen und mit dem Erdkörper starr verbundenen Koordinatensystem, das wir nun definieren wollen, sei B der Anfangspunkt und die nach „oben", d. h. in bezug auf das Erdellipsoid nach außen gerichtete Lotrichtung BZ die positive Z-Achse, so daß also die Horizontebene zur XY-Ebene wird. In ihr sei BX, also der Schnitt zwischen Horizont- und Meridianebene, die X-Achse. Die positive X-Richtung zeige nach *Süden* und bilde daher mit der Richtung PP' einen spitzen Winkel φ. Die positive Y-Achse soll nach *Westen*

zeigen; sie steht in Abb. 3 senkrecht auf der Papierebene und ist auf den Beschauer gerichtet.

Abb. 4 zeigt die Sphäre des Beobachtungsorts, d. h. die um B als Mittelpunkt konstruierte Einheitskugel, die durch den Horizont $SWNO$ in eine obere und untere Hälfte zerlegt wird. Die *Lotrichtung* hat mit der Sphäre zwei Punkte gemeinsam, das *Zenit* Z (oben) und das *Nadir* Z' (unten). Auf dem *Horizont* zeichnen die X- und die Y-Achse vier weitere Hauptpunkte ab, den *Südpunkt* S, den *Westpunkt* W, den *Nordpunkt* N und den *Ostpunkt* O. Die Endpunkte der positiven X-, Y- und Z-Achse sind S, W und Z.

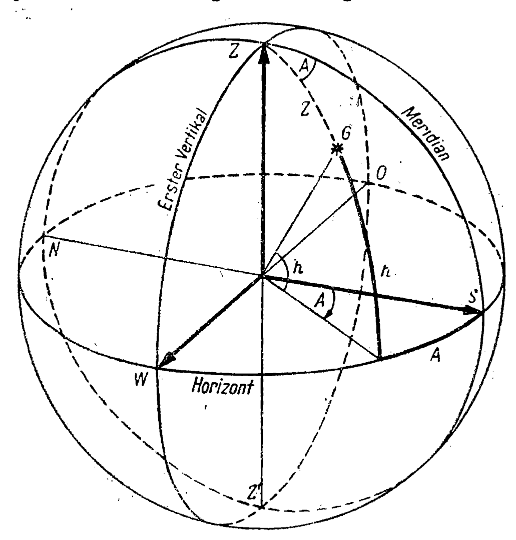


Abb. 4: System des Horizontes

Die drei Hauptkoordinatenebenen dieses lokalen Systems, das wir als das *System des Horizontes* bezeichnen, erzeugen an der Sphäre drei zueinander orthogonale Größtkreise: die XY-Ebene den *Horizont* $SWNO$, die XZ-Ebene den *Meridian* $SZNZ'$, die YZ-Ebene den *Ersten Vertikal* $WZOZ'$. Allgemein bezeichnet man als *Vertikale* alle Größtkreise, die durch Zenit und Nadir gehen und daher den Horizont rechtwinklig schneiden. Jeder Kreis der Sphäre, der parallel zum Horizont verläuft, heißt *Almukantarat.* Unter allen Almukantaraten ist nur der Horizont selbst ein Größtkreis.

Ist G der sphärische Ort eines Gestirns, so sind seine Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos h \, \cos A, \\ y &= \cos h \, \sin A, \quad (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \\ z &= \sin h, \end{aligned}\right\} \qquad (I;5)$$

wenn h die Erhebung des Gestirns über dem Horizont und A den Winkel bezeichnet, den der Vertikal von G mit dem Meridian bildet. Man nennt h die *Höhe*, A das *Azimut* des Gestirns. Die Höhe kann zwischen $-\frac{\pi}{2}$ (Nadir) und $+\frac{\pi}{2}$ (Zenit) variieren.[1]) Das Azimut wird auf dem Horizont vom Südpunkt nach Westen gezählt und kann demnach zwischen 0 und 2π liegen, bzw. zwischen $-\pi$ und $+\pi$, wenn man für Sterne östlich des Meridians

[1]) Im Winkelmaß ist $\pi = 180°$, also $\frac{\pi}{2} = 90°$ zu setzen.

negative Azimute einführt. Gestirne, die auf dem gleichen Almukantarat liegen, haben gleiche Höhen, Gestirne auf dem gleichen Vertikal gleiche Azimute oder, falls sie auf verschiedenen Seiten vom Zenit liegen, solche, die sich um π unterscheiden. Im Zenit und im Nadir verliert der Begriff des Azimuts seinen Sinn. Diese beiden Punkte sind durch die Angabe $h = \pm \frac{\pi}{2}$ allein eindeutig bestimmt.

In der Folge werden wir statt der Höhe h meistens die *Zenitdistanz*

$$z = \frac{\pi}{2} - h$$

benutzen, die alle Werte zwischen 0 (Zenit) und π (Nadir) annehmen kann. Alle Punkte des Horizonts haben die Zenitdistanz $\frac{\pi}{2}$.

4. Das lokale System des Äquators

Außer der Lotrichtung gibt es noch eine zweite fundamentale Richtung, die sich innerhalb des Horizontsystems nicht ändert und daher zur Definition eines weiteren lokalen Koordinatensystems dienen kann. Sie verläuft parallel der Rotationsachse der Erde und zeigt nach zwei gegenüberliegenden Punkten der Sphäre, dem *Nordpol P* und dem *Südpol P' des Himmels*, deren Lage an der Sphäre, wie später gezeigt werden soll, durch Beobachtungen leicht bestimmt werden kann. Abb. 5, die wie Abb. 3 den durch den Beobachtungsort B gelegten Meridianschnitt der Erde darstellt, zeigt, daß die Richtungen von B nach P und P' in der Meridianebene von B liegen und daß die Höhe von P über dem Horizont von B gleich dem schon genannten Winkel φ ist, den die Erdachse mit der Horizontebene von B bildet.

Als Höhe des Nordpols, kurz als *Polhöhe* von B, ist φ positiv, wenn B auf der Nordhalbkugel der Erde liegt. Für Beobachtungsorte auf der südlichen Halbkugel ist φ negativ, da für diese der Nordpol des Himmels unter dem Horizont liegt. Fällt B mit dem Nordpol bzw. dem Südpol der Erde zusammen, so ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, da im ersteren Falle der Himmelsnordpol im Zenit, im letzteren Falle im Nadir steht. Für alle Orte des Erdäquators befinden sich beide Himmelspole im Horizont, und es ist $\varphi = 0$.

Die Gerade PP' wird als *Weltachse* bezeichnet, da um sie das Himmelsgewölbe mit den praktisch unendlich weit entfernten Fixsternen seine scheinbare tägliche Drehung ausführt. Die Weltachse dient als Hauptachse eines neuen lokalen und mit dem Erdkörper fest verbundenen Koordinatensystems (Abb. 6), das aus dem Horizontsystem hervorgeht, wenn man um dessen Y-Achse OW eine Drehung um $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ausführt, und zwar vom Westpunkt aus gesehen im positiven, d. h. der Uhrzeigerbewegung entgegen-

gesetzten Sinne. Die Horizontebene geht durch diese Drehung in die auf der Weltachse senkrecht stehende Ebene des *Himmelsäquators AWQO* über. Durch einen Gestirnsort *G* der Sphäre läßt sich ein dem Äquator paralleler Kreis legen, der als *Parallelkreis* bezeichnet werden soll. Unter allen Parallelkreisen ist der Himmelsäquator selbst der einzige Größtkreis.

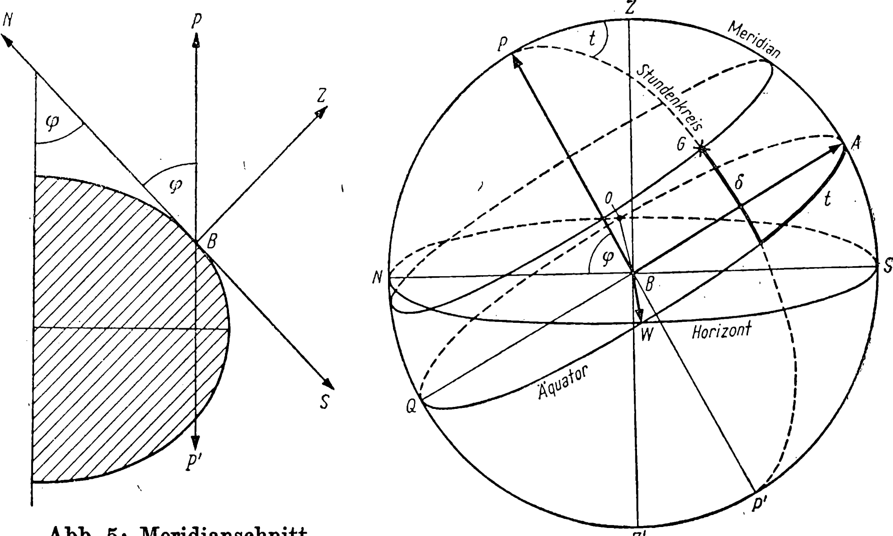


Abb. 5: Meridianschnitt Polhöhe des Beobachtungsorts

Abb. 6: Erstes Äquatorsystem[1])

Der Parallelkreis durch *G* wird von dem *Stundenkreis PGP'* senkrecht geschnitten, jenem Halbkreis, der *G* mit den beiden Himmelspolen verbindet. Der Winkel *t*, den der Stundenkreis mit dem Meridian einschließt, heißt *Stundenwinkel.* Dem Stundenkreis, der durch das Zenit geht, und der mit dem Meridian zusammenfällt, wird der Stundenwinkel $t = 0$ zugeschrieben, von ihm aus zählt man die Stundenwinkel positiv nach Westen. Der Abstand des Gestirns vom Himmelsäquator, der für Sterne nördlich des Äquators positiv gerechnet wird, heißt *Deklination.* Durch den Stundenwinkel *t* und die Deklination δ ist der Ort des Gestirns eindeutig bestimmt.

Die Beziehungen zwischen den Koordinaten im System des Horizonts (A, h bzw. z) und denen im lokalen Äquatorsystem (t, δ) leitet man aus dem sphärischen Dreieck *PZG* (Abb. 7) ab, das aus dem Himmelsnordpol *P*, dem Zenit *Z* und dem Gestirnsort *G* gebildet wird und *Pol—Zenit-Dreieck* oder *Nautisches Dreieck* heißt.[2])

[1]) Abb. 6 (ebenso Abb. 10 und 29) sind schematisch gezeichnet, d. h., es wurde darauf verzichtet, wie in Abb. 4 und 16 die Sphäre in exakter Parallelprojektion wiederzugeben. Diese Ungenauigkeit mußte der Deutlichkeit des Bildes zuliebe in Kauf genommen werden.

[2]) Sphärische Dreiecke werden hier immer so gezeichnet, wie sie einem Beobachter *außerhalb* der Sphäre erscheinen.

Die Grundformeln der Sphärischen Trigonometrie [Anhang A (1)] ergeben

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos A, \\ \cos\delta \cos t &= \cos z \cos\varphi + \sin z \sin\varphi \cos A, \\ \cos\delta \sin t &= \sin z \sin A \end{aligned} \qquad (I;6)$$

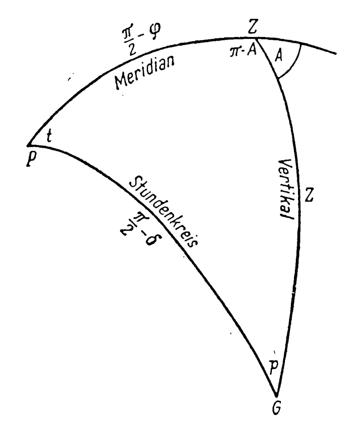


Abb. 7:
Das „Nautische Dreieck“
(Pol—Zenit—Gestirn)

für die Berechnung von (δ, t) aus (z, A) und

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t, \\ \sin z \cos A &= -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos t, \\ \sin z \sin A &= \cos\delta \sin t \end{aligned} \qquad (I;7)$$

für die umgekehrte Operation, unter der Voraussetzung, daß die Polhöhe φ des Beobachtungsortes bekannt ist.

Der Winkel p, den Stundenkreis und Vertikal des Sternes miteinander einschließen und der positiv sein möge, wenn sich der Stern westlich des Meridians befindet, wird als der *parallaktische Winkel* bezeichnet.

5. Geographische Koordinaten

Die relative Lage der beiden lokalen Bezugssysteme eines Beobachtungsortes B_1 zueinander und zu den entsprechenden Bezugssystemen anderer Orte B_2, B_3, ... ist von der geographischen Lage dieser Punkte abhängig. Es ist vorteilhaft, die geographischen Koordinaten eines Beobachtungsortes so zu definieren, daß diese für alle Methoden der Geographischen Ortsbestimmung grundlegenden Beziehungen möglichst einfach werden.

Wir nehmen zunächst wieder an, daß die Erdoberfläche die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoids habe. Die durch die Erdachse begrenzten Halbebenen schneiden aus dieser Figur kongruente Halbellipsen heraus, die als *Meridiane* oder *Längenkreise* der Erde bezeichnet werden. Allen Orten, die auf dem gleichen Längenkreise liegen, wird als gemeinsame Koordinate die gleiche *geographische Länge* λ zugeordnet. Demjenigen Meridian, der durch einen willkürlich auszuwählenden Ort hindurchgeht, wird die Länge $\lambda = 0$ gegeben — er heißt *Nullmeridian.* Auf Grund internationaler Vereinbarungen ist es heute fast allgemein üblich geworden, hierfür den Längenkreis zu nehmen, der durch die Sternwarte in *Greenwich* (London) hindurchgeht (genauer gesagt: durch den Mittelpunkt des dort aufgestellten Meridiankreises). Die Längendifferenz zweier geographischer Orte ist gleich dem Winkel, der von den beiden die Meridiane dieser Orte erzeugenden Halbebenen eingeschlossen wird. Die geographische Länge wird vom Nullmeridian positiv nach Westen, negativ nach Osten gezählt. Durch eine zweite Koordinate, die wir als *geographische Breite* bezeichnen wollen, wird die Lage des

Beobachtungsortes auf der Meridianellipse festgelegt. Abb. 8 stellt den Meridianschnitt dar, der den Ort B enthält. P und P' seien die Erdpole, M der Erdmittelpunkt und A der Äquatorpunkt der Meridianellipse, deren große Halbachse $MA = a$, und deren kleine Halbachse $MP = MP' = b$ sei.

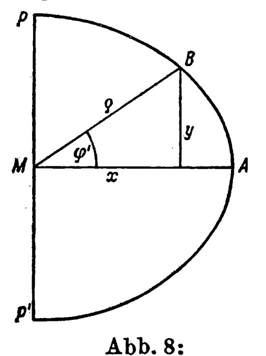


Abb. 8: Geozentrische Breite

Die Definition der geographischen Breite erfordert einige Überlegungen, da sich hierfür mehrere Möglichkeiten darbieten:

1. Seien x, y die rechtwinkligen Koordinaten von B in einem System mit M als Anfangspunkt, MA als x- und MP als y-Achse, so ist

$$\begin{aligned} x &= a\cos\psi \\ y &= b\sin\psi \end{aligned}\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq +\frac{\pi}{2}\right) \qquad (\text{I};\ 8)$$

die Parameterdarstellung der Halbellipse PAP', die nach Eliminierung von ψ in die Ellipsengleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \qquad (\text{I};\ 9)$$

übergeht. Durch den Parameter ψ wird die Lage von B auf dem Meridian eindeutig bestimmt.

2. Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi' \\ y &= \varrho\sin\varphi' \end{aligned}\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi' \leqq +\frac{\pi}{2}\right) \qquad (\text{I};\ 10)$$

werden die rechtwinkligen Koordinaten (x,y) in die Polarkoordinaten $(\varrho,\ \varphi')$ übergeführt (Abb. 8). Zur Kennzeichnung von B leistet φ' die gleichen Dienste wie ψ.

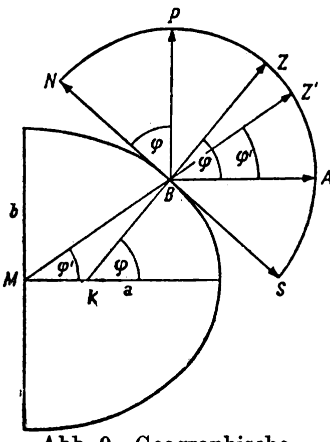


Abb. 9: Geographische und geozentrische Breite

3. Schließlich ist auch die im vorigen Abschnitt definierte *Polhöhe* φ von B für denselben Zweck geeignet, da auch sie die Lage von B eindeutig charakterisiert. In Abb. 9 ist der Meridianschnitt gleichzeitig auf die Sphäre von B erstreckt, die er im Meridian NZS schneidet. Nach Definition ist φ die Höhe des Himmelsnordpols P über dem Horizont NS von B; gleichzeitig ist diese Größe, wie man unmittelbar aus der Figur abliest, gleich der *Deklination des Zenits* Z bzw. gleich dem Winkel, den die Normale KBZ der Meridianellipse in B mit der großen Achse bildet.

Die drei Größen ψ, φ, φ' sind einander gleich, wenn B an den Polen oder am Äquator der Erde liegt, sie haben dann die gemeinsamen Werte $\pm\frac{\pi}{2}$ bzw. 0. Wäre die Erde eine Kugel, also $a = b$, so wäre stets $\psi = \varphi = \varphi'$. Für die geringfügig abgeplattete Erde sind die Unterschiede zwischen den drei Winkeln klein.

Da φ als Höhe des Himmelsnordpols und als Deklination des Zenits einfache Beziehungen zu den beobachtbaren Richtungen der lokalen Bezugssysteme hat und demgemäß auch in den Gleichungen (I; 6, I; 7) erscheint, verdient diese Größe vor den beiden anderen, die der Beobachtung nicht unmittelbar zugänglich sind, den Vorzug. Wir setzen daher fest: *Die geographische Breite eines Ortes ist gleich seiner Polhöhe* φ. Wir bezeichnen ferner φ' als die *geozentrische Breite* und den Punkt Z' (Abb. 9), in dem die Richtung MB in ihrer Verlängerung die Sphäre trifft, als das *geozentrische Zenit*. Die geozentrische Breite ist gleich der Deklination des geozentrischen Zenits.

Aus (I; 10) ergibt sich

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{y}{x} \qquad \text{(I; 11)}$$

und aus (I; 8)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{ay}{bx} = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi'. \qquad \text{(I; 12)}$$

Ferner ist die Richtungskonstante der Ellipsennormale in B

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi'. \qquad \text{(I; 13)}$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{tg}\varphi' = \dfrac{b}{a}\operatorname{tg}\psi, \quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{b}\operatorname{tg}\psi \\ \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}^2\psi \end{array}\right\} \qquad \text{(I; 14)}$$

und, da $b < a$,

$$|\varphi'| \leqq |\psi| \leqq |\varphi|.$$

Für das Erdellipsoid setzen wir nach HAYFORD (1909)

$$\left.\begin{array}{l} a = 6378{,}388 \text{ km}, \qquad b = 6356{,}909 \text{ km} \\ \text{und die } \textit{Abplattung} \text{ der Erde} \\ \alpha = \dfrac{a-b}{a} = \dfrac{1}{297{,}0}. \end{array}\right\} \qquad \text{(I; 15)}$$

Um den Unterschied zwischen geographischer und geozentrischer Breite zu berechnen, bilden wir mit Rücksicht auf (I; 14)

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi'}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi'} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\frac{\operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} = \frac{a^2 - b^2}{2ab}\sin 2\psi. \qquad \text{(I; 16)}$$

Die Differenz $\varphi - \varphi'$ erreicht also ihre Extreme für $\psi = \pm 45°$, und es ist, wenn wir für a, b die Zahlenwerte (I; 15) einsetzen,

$$|\varphi - \varphi'| \leqq \operatorname{arc\,tg}\frac{a^2 - b^2}{2ab} = 11'\!,6.$$

Der Abstand ϱ des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkt ergibt sich aus (I; 10) und (I; 8):

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi$$

oder, wenn man die Identitäten

$$\cos^2\psi = \frac{1+\cos 2\psi}{2}, \quad \sin^2\psi = \frac{1-\cos 2\psi}{2}$$

benutzt und $\varepsilon = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ setzt,

$$\varrho^2 = \frac{a^2+b^2}{2}(1+\varepsilon\cos 2\psi). \qquad \text{(I; 17)}$$

Mit Hilfe des Parameters ψ lassen sich also ϱ und $\varphi - \varphi'$, die bei einigen speziellen Aufgaben der Geographischen Ortsbestimmung (z. B. Berücksichtigung der Mondparallaxe bei Längenbestimmungen) gebraucht werden, in einfachster Form darstellen. Es ist aber erwünscht, auch Formeln zu besitzen, in denen diese beiden Größen unmittelbar als Funktionen der geographischen Breite erscheinen. Setzt man nach (I; 13)

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi,$$

so ergibt sich nach dem Satz Anhang B II

$$\operatorname{tg}(\varphi'-\varphi) = \frac{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\sin 2\varphi}{1-\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\cos 2\varphi} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}(\varphi-\varphi') = \frac{\varepsilon\sin 2\varphi}{1+\varepsilon\cos 2\varphi}, \qquad \text{(I; 18)}$$

wobei
$$\varepsilon = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \alpha\,\frac{2-\alpha}{2-2\alpha+\alpha^2} = \alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}+\cdots\right)$$

nur wenig größer als die Abplattung ist. Setzt man ferner

$$\cos 2\psi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\psi}{1+\operatorname{tg}^2\psi} = \frac{a^2-b^2\operatorname{tg}^2\varphi}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2\varphi}$$

und hierin

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi},$$

so ergibt sich

$$\cos 2\psi = \frac{\varepsilon+\cos 2\varphi}{1+\varepsilon\cos 2\varphi},$$

und man kann daher (I; 17) in der Form

$$\varrho^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{1+2\varepsilon\cos 2\varphi+\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos 2\varphi}$$

schreiben. Da

$$1+\varepsilon\cos 2\varphi = \frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}(1+2\eta\cos 2\varphi+\eta^2),$$

wenn

$$\eta = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{\alpha}{2}+\cdots\right) \sim \frac{\varepsilon}{2}$$

gesetzt wird, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\varrho = \frac{a^2+b^2}{a+b}\sqrt{\frac{1+2\varepsilon\cos 2\varphi+\varepsilon^2}{1+2\eta\cos 2\varphi+\eta^2}}. \qquad \text{(I; 19)}$$

Da $\varphi-\varphi'$, ε, η klein sind, benutzt man statt (I; 18), (I; 19) auch rasch konvergierende Reihen. Es folgt (Beweise Anhang B I, III) aus (I; 18), (I; 19)

$$\varphi-\varphi' = \varepsilon\sin 2\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin 4\varphi + \frac{1}{3}\varepsilon^3\sin 6\varphi - \cdots, \qquad \text{(I; 20)}$$

$$\left.\begin{aligned}\ln\varrho &= \ln\frac{a^2+b^2}{a+b} + (\varepsilon-\eta)\cos 2\varphi - \frac{1}{2}(\varepsilon^2-\eta^2)\cos 4\varphi + \cdots \\ &\sim \ln\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{1}{2}\varepsilon\cos 2\varphi - \frac{3}{8}\varepsilon^2\cos 4\varphi + \cdots.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I; 21)}$$

Es ist schon darauf hingewiesen worden, daß diese Formeln nur dann strenge Gültigkeit haben, wenn angenommen wird, daß alle Beobachtungsorte auf dem gleichen Rotationsellipsoid liegen, und wenn ihre Horizontalebenen als Tangentialebenen, ihre Lotlinien als Normalen dieser Fläche angesehen werden dürfen. In Wirklichkeit liegen diese Dinge ein wenig verwickelter. Horizontebene und Lotlinie sind Tangentialebene und Normale der durch den Beobachtungsort gehenden *Niveaufläche der Schwerkraft.* Diese Flächen haben zwar, besonders über dem Meere, angenähert ellipsoidische Form, weichen aber örtlich nicht unbeträchtlich von ihr ab. Diejenige Niveaufläche, die sich dem mittleren Meeresspiegel am besten anschmiegt, wird als *Geoid* bezeichnet, dasjenige Rotationsellipsoid, von dem sich das Geoid möglichst wenig unterscheidet, als *Referenzellipsoid.* Auf dieses beziehen sich die Zahlenwerte (I; 15). Wegen der unregelmäßigen Massenverteilung, besonders in den oberen Erdschichten, sind die Abweichungen des Geoids vom Referenzellipsoid stellenweise nicht gering. Hohe Gebirgszüge rufen Aufwölbungen des Geoids und der ihm parallelen Niveauflächen hervor; besonders an den Rändern der Gebirgsmassive finden daher merkliche *Lotabweichungen* statt, in dem Sinne, daß die Zenitpunkte der Randorte Verschiebungen erleiden,

die nach außen hin divergieren. Die Beobachtung der Lotabweichungen und die Fixierung des Geoids ist Aufgabe der Geodäsie und soll uns hier nicht beschäftigen. Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß diese Verhältnisse nicht ohne Einfluß auf die Gestalt des geographischen Koordinatennetzes sind. Während auf dem Ellipsoid die Meridiane kongruente Ellipsen und die Linien gleicher geographischer Breite genaue dem Äquator parallele Kreise sind, ist dies auf dem Geoid keineswegs streng der Fall. Vielmehr erscheinen diese Linien, namentlich in gebirgigen Gegenden, mehr oder weniger verzerrt. Die Geodäten müssen bei Landvermessungen diese Deformationen berücksichtigen. Uns genügt es, von ihrer Existenz Kenntnis zu nehmen.

In geringfügigem Maße sind die geographischen Koordinaten auch zeitlichen Änderungen unterworfen. Die Rotationsachse der Erde ist mit dem Erdkörper nicht ganz fest verbunden, sondern führt kleine periodische Schwankungen um eine mittlere Lage aus. Die *instantanen Pole,* d. h. diejenigen Erdpole, die der augenblicklichen Rotation entsprechen, bewegen sich langsam in einem begrenzten Bereich, dessen Durchmesser kaum größer als 20 m ist. Immerhin lassen genaue Messungen der Polhöhe an Sternwarten die hieraus folgenden *Polhöhenschwankungen* deutlich erkennen, wenn auch deren Höchstwert nur wenige Zehntel einer Bogensekunde erreicht. Diese Polhöhenschwankungen enthalten neben starken Unregelmäßigkeiten zwei Periodizitäten: eine Jahresschwankung und darüber gelagert eine von etwa 14 Monaten Dauer, die nach ihrem Entdecker als die „CHANDLERsche Periode“ bezeichnet wird. Die Polschwankungen haben natürlich auch kleine Änderungen der geographischen Länge zur Folge. Wir dürfen uns hier mit dem Hinweis begnügen, daß die Polschwankungen nur den feinsten Methoden astronomischer Meßkunst zugänglich sind und bei geographischen Ortsbestimmungen immer vernachlässigt werden. Selbst bei der Bestimmung der Sternwartenkoordinaten spielen sie nur eine untergeordnete Rolle, da die hierzu notwendigen Beobachtungsreihen sich meist über längere Zeiträume erstrecken, so daß die Einflüsse der periodischen Polschwankungen aus dem Endergebnis zum überwiegenden Teil herausfallen.

Zur vollständigen Darstellung der geographischen Lage eines Beobachtungsorts gehört auch die Angabe seiner Höhe über dem Referenzellipsoid (Höhe über dem Meeresspiegel oder Seehöhe). Sie kann durch astronomische Beobachtungen nicht ermittelt werden, sondern wird auf terrestrischem Wege bestimmt — entweder durch geodätischen Anschluß an Punkte mit bekannter Seehöhe oder (einfacher, wenn auch weniger genau) durch die *barometrische Höhenmessung.* Hierbei wird die Tatsache benutzt, daß der Luftdruck nach bekannten Gesetzen mit der Höhe abnimmt. Für die Anwendung der Methoden der Geographischen Ortsbestimmung ist die Kenntnis der Seehöhe meistens belanglos.

6. Die geozentrischen Örter der Gestirne

Die erste der drei vorbereitenden Aufgaben, die wir uns am Anfang des Abschnitts 3 gestellt hatten, ist gelöst: wir haben die Örter der Gestirne in

die lokalen, d. h. mit dem Beobachtungsort und seiner irdischen Umgebung fest verbundenen Koordinatensysteme des Horizonts und des Äquators eingeordnet und die Beziehungen zwischen diesen Systemen und der geographischen Lage des Beobachtungsorts untersucht. Wir wenden uns nun der zweiten Aufgabe zu, die Gestirnsörter auch in bezug auf ein raumfestes, d. h. mit der Gesamtheit der Fixsterne verknüpftes System zu bestimmen.

Wir können die Schwierigkeiten, die sich der Definition eines solchen Systems gegenüberstellen und deren gründliche Diskussion eine der wichtigsten Aufgaben der Sphärischen Astronomie darstellt, hier nur kurz streifen. Wären alle Fixsterne, einschließlich der Sonne, starr miteinander verbunden, so würden solche Schwierigkeiten nicht bestehen. In Wirklichkeit bewegen sich die Fixsterne relativ zueinander und zur Sonne, und projiziert man den Fixsternhimmel auf eine Sphäre um den Mittelpunkt der Sonne, so verändern die „Örter" der Sterne ihre gegenseitige Lage beständig, wenn auch diese *Eigenbewegungen* infolge der sehr großen Entfernungen der Sterne nur klein sind und meist erst in längeren Zeiträumen merkbar werden. Man kann diese relativen Bewegungen dadurch in *absolute* überführen, daß man etwa die Annahme macht, die Vektorensumme der absoluten Eigenbewegungen sei gleich null. Durch Berücksichtigung der so definierten Eigenbewegungen, die man für historische Zeiträume immer als gleichförmig und geradlinig ansehen darf, kann man die Anordnung der Fixsterne an der heliozentrischen Sphäre auf deren Anordnung zu einem vorgegebenen Zeitpunkt, der *Epoche*, zurückführen.

In ein solches Fundamentalsystem der Fixsternörter ließen sich die Hauptkoordinatenrichtungen eines räumlichen Bezugsystems leicht einordnen, etwa indem man die XY-Ebene durch zwei beliebig ausgewählte Sternörter S_1 und S_2 gehen läßt und auf dem so bestimmten Größtkreis die Richtung nach S_1 als X-Richtung definiert. Eine solche Definition wäre aber unzweckmäßig, da sie völlig willkürlich und ohne Beziehung zu den lokalen Systemen ist. Es ist daher vorzuziehen, zum Aufbau des neuen Systems zwei fundamentale Richtungen zu benutzen, die sich in die lokalen Systeme gut einfügen lassen, wenn auch ihre Verbindung mit dem raumfesten Fixsternsystem nicht völlig starr ist: das sind die Richtungen der Erdachse und der Normale auf der *Ekliptik*, d. h. der Ebene, in der die Erde um die Sonne kreist.

Wir sehen für den Augenblick die Erde als ruhend an und verlegen den Mittelpunkt der Sphäre in den Erdmittelpunkt M. Diese geozentrische Sphäre wird von der Erdachse in den Himmelspolen P und P' getroffen, von der Normale der Ekliptik in den *Polen der Ekliptik* E und E' (Abb. 10). Der Bogen $PE = \varepsilon$ (Schiefe der Ekliptik) umfaßt rund $23^1/_2{}^\circ$, er ist gleich der Neigung des Himmelsäquators gegen die Ekliptik. Die Sonne, die vom geozentrischen Standpunkt aus gesehen die Ekliptik im Laufe eines Jahres in west-östlicher Richtung durchwandert, überschreitet am Frühlingsanfang den Himmelsäquator von Süden nach Norden. Diesen Schnittpunkt X zwischen Ekliptik und Äquator, den *Frühlingspunkt*, bestimmen wir zum Endpunkt der positiven X-Achse des neuen Koordinatensystems. Die

positive Y-Richtung möge im Himmelsäquator liegen, 90° vom Frühlingspunkt nach Osten, die positive Z-Richtung zeige nach dem Nordpol P des Himmels.

Das neue Koordinatensystem, das wir als das *zweite Äquatorsystem* bezeichnen wollen, hat mit dem ersten (lokalen) Äquatorsystem die Z-Achse (Weltachse) und damit auch die Lage der XY-Ebene (Äquatorebene) gemeinsam. Diejenige Koordinate eines Gestirnsortes G, die den Abstand vom Äquator bedeutet, die *Deklination* δ, ist daher in beiden Systemen dieselbe. Die andere Koordinate α, die den Winkel zwischen den Stundenkreisen des Gestirns und des Frühlingspunktes bezeichnet (Abb. 10), heißt *Rektaszension* und wird vom Frühlingspunkt nach *Osten* gezählt, also in entgegengesetztem Sinne wie die entsprechende Koordinate im lokalen Äquatorsystem, der Stundenwinkel t, der ja in westlicher Richtung wächst. Mit anderen Worten: das erste Äquatorsystem ist, ebenso wie das Horizontsystem, im Uhrzeigersinn gedreht (Linkssystem), das zweite ist ein Rechtssystem.

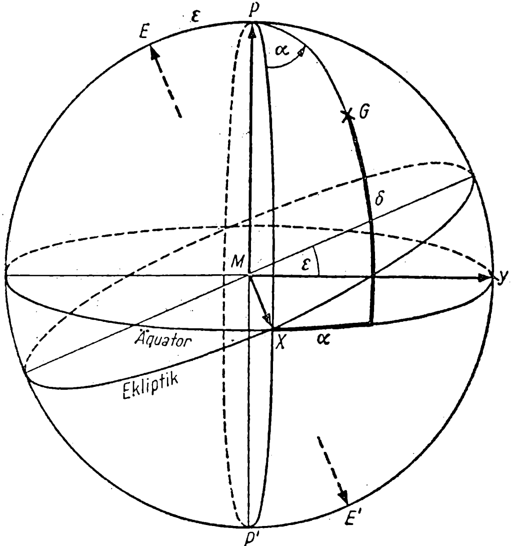


Abb. 10: Zweites Äquatorsystem[1])

Wenn wir das zweite Äquatorsystem zum Unterschied von dem lokalen als ein *raumfestes* bezeichnen, so ist das nur angenähert richtig, denn seine Fundamentalrichtungen, die Weltachse und die Normale der Erdbahnebene, sind keineswegs fest mit dem System der Fixsterne verbunden. Die Lage der Ekliptik ändert sich im Laufe der Zeit infolge der Störungen der Erdbahnbewegung durch die Planeten; der Pol der Ekliptik führt daher langsame Schwankungen um eine mittlere Lage aus. Durch die Anziehungskräfte, die Sonne und Mond auf den Äquatorwulst der abgeplatteten rotierenden Erde ausüben, erfährt ferner die Richtung der Erdachse eine zeitliche Änderung, in deren Verlauf der Rotationspol P um den Ekliptikpol E in rund 26000 Jahren eine Kreiswanderung (*Präzession*) und außerdem kleine Schwankungen von kürzerer Periode (*Nutation*) ausführt. Die Koordination α, δ der Fixsterne sind also infolge der Wirkungen von Präzession und Nutation nicht fest, sondern langsamen Änderungen unterworfen, deren Berechnung Aufgabe der *Himmelsmechanik* und der *Sphärischen Astronomie* ist. In den *Astronomischen Jahrbüchern*[2]), die bei der Ausfüh-

[1]) Siehe Fußnote zu Abb. 6.

[2]) Z. B. Berliner Astronomisches Jahrbuch, Nautical Almanac (London), American Ephemeris (Washington), Connaissance des temps (Paris), Almanaque Nautico (San Fernando, Spanien).

rung von Zeit- und Ortsbestimmungen unentbehrliche Hilfsmittel sind, findet man Rektaszension und Deklination einer großen Anzahl von helleren Fixsternen als Funktionen der Zeit in Form von Tafeln mit zehntägigen Intervallen aufgezeichnet. In diesen Tafeln (Ephemeriden) sind gleichzeitig die Eigenbewegungen berücksichtigt sowie diejenigen Änderungen, die an die sphärischen Örter der Fixsterne noch angebracht werden müssen, weil die Erde in bezug auf das System der Fixsterne nicht ruht, sondern ihre jährliche Bahn um die Sonne beschreibt.

Die letztgenannten Änderungen sind zweifacher Natur: Zunächst ist klar, daß die Richtung nach einem Gestirn von endlicher Entfernung sich ändern muß, wenn wir den Sphärenmittelpunkt vom Mittelpunkt der in der Mitte des Weltalls *ruhenden* Erde (bzw. vom Mittelpunkt der Sonne) in den der *bewegten* Erde verlagern. Ist a der Halbmesser der Erdbahn, r die Entfernung Sonne—Stern, so ist die maximale Verschiebung p, die der Fixsternort infolge der Erdbewegung erleidet, die sogenannte *jährliche Parallaxe*, durch

$$\sin p = \frac{a}{r} \qquad \text{(I; 22)}$$

gegeben. Nun ist die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne $a = 1{,}495 \cdot 10^8$ km, die des nächsten Fixsterns (α Centauri) $r = 4{,}06 \cdot 10^{13}$ km, woraus $p = 0'',76$ folgt.[1]) Dies ist die bei weitem größte Fixsternparallaxe, die bisher beobachtet wurde. Die Zahl der Fixsterne, deren Örter durch die Parallaxe merklich beeinflußt werden, ist gering.

Die andere Verschiebung der Fixsternörter infolge der Erdbewegung ist die *jährliche Aberration*, die alle Sterne unabhängig von ihrer Entfernung betrifft und deren eigentliche Ursache die endliche Geschwindigkeit des Lichtes ist. In der sehr kurzen Zeit nämlich, die der Lichtstrahl des Gestirnes G benötigt, um (Abb. 11) vom Objektiv O des Fernrohrs bis zum Okular A zu gelangen, verschiebt sich infolge der Erdbewegung die optische Fernrohrachse AO parallel mit sich selbst nach $A'O'$. Der Lichtstrahl GO, der das Objektiv in der Stellung O trifft, erreicht daher das Auge des Beobachters, wenn dieses in A' angekommen ist. Während also der Lichtstrahl in Wirklichkeit die Strecke GOA' durcheilt, ist das Fernrohr auf die Richtung AO bzw. $A'O'$ eingestellt, d. h., der Beobachter erblickt den Stern an einem Orte, der um den Winkel $OA'O' = \alpha$ in Richtung auf

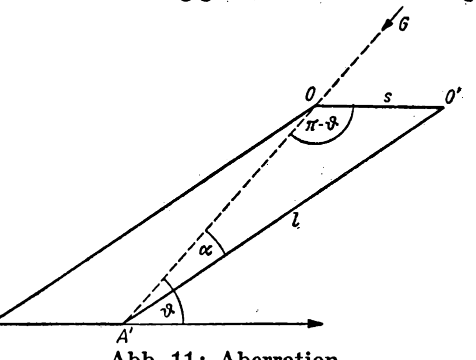


Abb. 11: Aberration

[1]) In Wirklichkeit wird natürlich umgekehrt aus der beobachteten Parallaxe p auf die Entfernung r des Sterns geschlossen.

den Zielpunkt der Erdbewegung verschoben ist. Ist l die Fernrohrlänge, $s = AA' = OO'$ die Verschiebung des Fernrohrs und ϑ der Winkel zwischen dem wahren Gestirnsort an der Sphäre und dem des Zielpunkts der Erdbewegung, so ist

$$\sin\alpha = \frac{s}{l}\sin\vartheta \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq \pi). \tag{I; 23}$$

Da nun offenbar $\frac{s}{l} = \frac{v}{c}$, wenn v die Erdgeschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet, so ist der Höchstbetrag der jährlichen Aberration durch die Ungleichung

$$\sin\alpha \leqq \frac{v}{c}$$

bestimmt. Setzen wir für v und c die runden Beträge 30 bzw. 300000 km/sec ein, so erhalten wir $\alpha \leqq 20''\!.6$ (genauer $20''\!.47$).

Diejenigen Fixsternörter, die sich auf die *instantane*, d. h. für die Zeit der Beobachtung gültige Lage der Ekliptik, des Äquators und damit des Frühlingspunktes (Äquinoktiums) beziehen und die Einflüsse der jährlichen Aberration, der jährlichen Parallaxe und der Eigenbewegung enthalten, werden als *scheinbare Örter* bezeichnet. In den Jahrbüchern sind die scheinbaren Rektaszensionen und Deklinationen der Mittelpunkte von Sonne, Mond und Planeten und die scheinbaren Halbmesser von Sonne und Mond für jeden Tag des Jahres, die Örter der wichtigsten Fixsterne für jeden 10. Tag um 0^h Greenwicher Zeit angegeben[1]). Alle diese Angaben beziehen sich auf die Sphäre um den Mittelpunkt der Erde (*geozentrische* Koordinaten). Beim Übergang auf den Beobachtungsort als Sphärenmittelpunkt (*topozentrische* Koordinaten) wird es unter Umständen nötig sein, weitere Korrektionen an die scheinbaren Örter anzubringen (tägliche Parallaxe, tägliche Aberration). Diese können in den Jahrbüchern nicht berücksichtigt werden, da sie von der geographischen Lage abhängen, und müssen somit vom Beobachter selbst berechnet werden.

7. Die tägliche Parallaxe

Die der Beobachtung zugänglichen lokalen Koordinaten (A, z bzw. t, δ) der Gestirne beziehen sich auf den Beobachtungsort, die in den Jahrbüchern angegebenen Größen (α, δ) auf den Erdmittelpunkt als Koordinatenanfang. Wollen wir sie miteinander in Beziehung setzen, so ist es notwendig, an die einen diejenigen Korrektionen anzubringen, die der Verschiebung des Sphärenmittelpunkts auf den Koordinatenanfang der anderen entsprechen.

---

[1]) Im Berliner Jahrbuch sind die scheinbaren Örter der Planeten Uranus, Neptun, Pluto von 4 zu 4 Tagen angegeben. Die Ephemeride des Mondes findet man in manchen nautischen Jahrbüchern, so im Nautical Almanac (London), von Stunde zu Stunde.

Die Verbesserung der lokalen Koordinaten durch Parallelverschiebung des Systems vom Beobachtungsort auf den Erdmittelpunkt bezeichnet man als die *tägliche Parallaxe*, da sie wegen der Drehung der Erde um ihre Achse eine eintägige Periode aufweist. Für die *Fixsterne* ist die tägliche Parallaxe verschwindend klein; ihre Größenordnung ergibt sich, wenn in dem Ausdruck (I; 22) für die jährliche Parallaxe der Erdbahnhalbmesser a durch den Erdhalbmesser ϱ ersetzt wird. Da $\varrho : a < 1 : 20000$, so folgt, daß die tägliche Fixsternparallaxe im selben Verhältnis kleiner ist als die jährliche. Sie ist also selbst bei den nächsten Fixsternen völlig bedeutungslos.

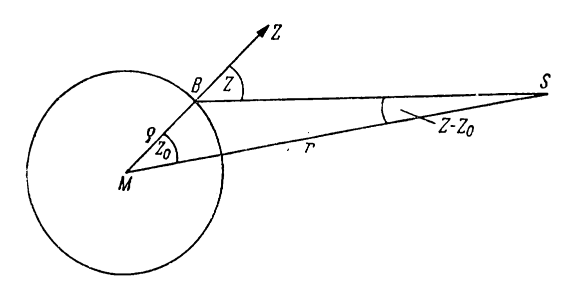


Abb. 12: Tägliche Parallaxe der Sonne

Für die Berechnung der täglichen Parallaxe der *Sonne* und der *Planeten* genügt es, die Erde als eine Kugel anzusehen. Ist (Abb. 12) B der Beobachtungsort, sind M und S die Mittelpunkte von Erde und Sonne, ist r die aus dem Jahrbuch bekannte Entfernung Erde — Sonne und ϱ der Erdhalbmesser, so ist MBZ die Richtung nach dem Zenit von B und die durch BMS bestimmte Ebene eine Vertikalebene im Horizontsystem des Beobachters. Verlegt man den Sphärenmittelpunkt von B nach M, so geht die Richtung BS nach der Sonne in MS über, die beobachtete Zenitdistanz z also in die geozentrische Zenitdistanz z_0, und es ist nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie

$$\sin(z - z_0) = \frac{\varrho}{r} \sin z = \sin \pi_\odot \sin z. \qquad (I; 24)$$

Der Maximalwert $\pi_\odot$ von $z - z_0$ tritt für $z = \frac{\pi}{2}$, also am Horizont ein und heißt *Horizontalparallaxe*. Setzen wir für ϱ den Äquatorhalbmesser (I; 15) und für r den mittleren Wert $1{,}495 \cdot 10^8$ km ein, so erhalten wir für die Horizontalparallaxe der Sonne

$$\pi_\odot = 8''80.^{1)}$$

Infolge der wechselnden Sonnenentfernung schwankt die in den Jahrbüchern als Ephemeride gegebene Sonnenparallaxe (siehe Anhang F III) zwischen 8,''66 und 8,''95. Der Einfluß der Breitenabhängigkeit von ϱ auf die Bestimmung von $\pi_\odot$ ist zehnmal geringer als diese Schwankung und kann bei allen Aufgaben der Geographischen Ortsbestimmung, die auf Beobachtungen der Sonne beruhen, unbedenklich vernachlässigt werden.

---

1) Nach neueren Beobachtungsergebnissen, die allerdings wohl noch durch weitere Untersuchungen erhärtet werden müssen, ist die mittlere Sonnenparallaxe gleich 8,''79 zu setzen.

Wegen der Kleinheit von $\pi_\odot$ darf man in (I; 24) den Bogen statt des Sinus setzen und erhält somit

$$z_0 = z - \pi_\odot \sin z. \tag{I; 25}$$

Um den beobachteten Sonnenort (A, z) wegen der täglichen Parallaxe zu verbessern, muß man also die gemessene Zenitdistanz um einen Betrag *verkleinern*, der im Zenit null ist, am Horizont aber seinen Höchstwert erreicht. Auf das Azimut der Sonne hat die tägliche Parallaxe keinen merklichen Einfluß. Die Formel (I; 25) läßt sich sinngemäß auch auf die Planeten anwenden.

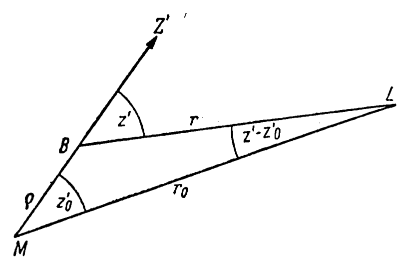


Abb. 13: Tägliche Parallaxe des Mondes

Da die tägliche Parallaxe des *Mondes* etwa das 400fache der Sonnenparallaxe beträgt (sie schwankt zwischen 54 und $61\,{}^1\!/_2$ Bogenminuten), so darf man bei ihrer Berechnung die ellipsoidische Erdgestalt nicht mehr vernachlässigen.

Sind (Abb. 13) M und L die Mittelpunkte von Erde und Mond und ist B der Beobachtungsort, so zeigt die Gerade MB nach dem geozentrischen Zenit Z', jenem Punkt des Meridians von B, dessen Deklination die geozentrische Breite φ' und dessen Zenitdistanz $|\varphi - \varphi'|$ ist. Bezeichnen wir mit ϱ die geozentrische Distanz des Beobachtungsortes, die nach den Formeln des Abschnitts 5 zu berechnen und nötigenfalls um die Seehöhe zu vergrößern ist, mit r und r_0 die Entfernungen des Mondes von B und M, mit z' und z_0' die sphärischen Abstände des Mondortes vom geozentrischen Zenit, wie sie von B bzw. M aus erscheinen, so ist im Dreieck BML

$$r \sin(z' - z_0') = \varrho \sin z_0' \tag{I; 26}$$

$$r \cos(z_0' - z_0') = r_0 - \varrho \cos z_0' \tag{I; 27}$$

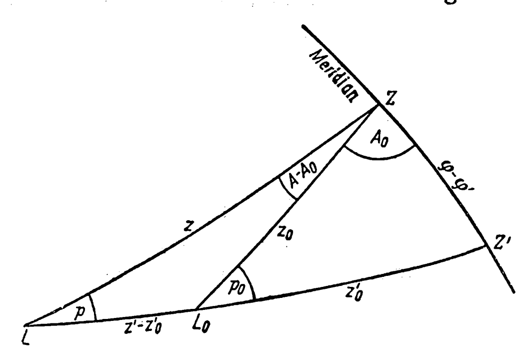


Abb. 14: Tägliche Parallaxe des Mondes (parallaktische Verschiebung des sphärischen Ortes)

Verlegt man also den Mittelpunkt der Sphäre von B nach M, so rückt der Mondort um den Betrag $z' - z_0'$ auf das geozentrische Zenit zu, verlagert sich also, wie in Abb. 14 aufgezeichnet, von L nach L_0. Bezeichnet man in den Dreiecken ZLZ' und ZL_0Z' die Winkel bei L und L_0 mit p und p_0, so findet man in ZL_0Z'

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \sin z_0' \sin p_0 = \sin(\varphi - \varphi') \sin A_0, \\ \beta &= \sin z_0' \cos p_0 = \cos(\varphi - \varphi') \sin z_0 - \sin(\varphi - \varphi') \cos z_0 \cos A_0, \\ \gamma &= \cos z_0' \qquad\;\; = \cos(\varphi - \varphi') \cos z_0 + \sin(\varphi - \varphi') \sin z_0 \cos A_0 \end{aligned}\right\} \tag{I; 28}$$

und in ZLL_0

$$\sin z \sin(A - A_0) = \sin(z' - z_0') \sin p_0,$$
$$\sin z \cos(A - A_0) = \cos(z' - z_0') \sin z_0 + \sin(z' - z_0') \cos z_0 \cos p_0,$$
$$\cos z = \cos(z' - z_0') \cos z_0 - \sin(z' - z_0') \sin z_0 \cos p_0$$

oder, wenn wir nach (I; 26) und (I; 27)

$$\sin(z' - z_0') = \frac{\varrho}{r} \sin z_0',$$

$$\cos(z - z_0') = \frac{r_0}{r} - \frac{\varrho}{r} \cos z_0'$$

setzen und (I; 28) berücksichtigen,

$$\left.\begin{aligned} r \sin z \sin(A - A_0) &= \varrho\alpha, \\ r \sin z \cos(A - A_0) &= r_0 \sin z_0 - \varrho(\gamma \sin z_0 - \beta \cos z_0), \\ r \cos z &= r_0 \cos z_0 - \varrho(\gamma \cos z_0 + \beta \sin z_0) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}; 29)$$

Hieraus ergibt sich zunächst, wenn man die erste Gleichung durch die zweite dividiert,

$$\operatorname{tg}(A - A_0) = \frac{\varrho\alpha}{r_0 \sin z_0 - \varrho(\gamma \sin z_0 - \beta \cos z_0)}.$$

Setzt man hierin für α, β, γ die Ausdrücke (I; 28) ein, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\operatorname{tg}(A - A_0) = \frac{\mu \sin A_0}{1 - \mu \cos A_0} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi')}{r_0 \sin z_0}. \qquad (\mathrm{I}; 30)$$

In den Jahrbüchern wird statt r_0 meist die *Äquatoreal-Horizontalparallaxe* $\pi_☾$ des Mondes angegeben, die durch

$$\sin \pi_☾ = \frac{a}{r_0}$$

definiert ist, wobei a den Äquatorhalbmesser der Erde darstellt. Das ist die maximale parallaktische Verschiebung des Mondes bei der Entfernung r_0. Sie tritt ein, wenn der Mond vom Äquator der Erde aus im Horizont beobachtet wird. Drückt man die Längen der Strecken r_0, ϱ in Einheiten des Äquatorhalbmessers aus, so wird $r_0 \sin \pi_☾ = 1$ und daher

$$\mu = \frac{\varrho \sin \pi_☾ \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z_0}. \qquad (\mathrm{I}; 31)$$

Multipliziert man die erste Gleichung (I; 29) mit $\operatorname{tg}\frac{A-A_0}{2}$ und addiert dazu die zweite, so erhält man wegen der Identität

$$\sin(A-A_0)\operatorname{tg}\frac{A-A_0}{2}+\cos(A-A_0)=1$$

die Gleichung

$$r\sin z=r_0\sin z_0+\varrho\left(\alpha\operatorname{tg}\frac{A-A_0}{2}+\beta\cos z_0-\gamma\sin z_0\right),\qquad \text{(I; 32)}$$

die zusammen mit der dritten Gleichung (I; 29)

$$r\cos z=r_0\cos z_0-\varrho\,(\beta\sin z_0+\gamma\cos z_0)\qquad \text{(I; 33)}$$

die Grundlage zur Bestimmung von $z-z_0$ liefert.

Multipliziert man (I; 32) (I; 33) mit $\cos z_0$, $-\sin z_0$ bzw. mit $\sin z_0$, $\cos z_0$, so folgt nämlich

$$r\sin(z-z_0)=\varrho\left(\alpha\cos z_0\operatorname{tg}\frac{A-A_0}{2}+\beta\right),$$

$$r\cos(z-z_0)=r_0+\varrho\left(\alpha\sin z_0\operatorname{tg}\frac{A-A_0}{2}-\gamma\right).$$

Setzt man für α, β, γ wiederum die Ausdrücke (I; 28) ein und definiert einen Hilfswinkel ζ durch

$$\operatorname{tg}\zeta=\operatorname{tg}(\varphi-\varphi')\frac{\cos\frac{A+A_0}{2}}{\cos\frac{A-A_0}{2}},\qquad \text{(I; 34)}$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} r\sin(z-z_0)&=\varrho\cos(\varphi-\varphi')\sin(z_0-\zeta)\sec\zeta,\\ r\cos(z-z_0)&=r_0-\varrho\cos(\varphi-\varphi')\cos(z_0-\zeta)\sec\zeta\end{aligned}\right\}\qquad \text{(I; 35)}$$

und daher

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(z-z_0)&=\frac{\nu\sin(z_0-\zeta)}{1-\nu\cos(z_0-\zeta)}\\ \text{mit}\quad \nu&=\frac{\varrho}{r_0}\cos(\varphi-\varphi')\sec\zeta=\varrho\sin\pi_{☾}\cos(\varphi-\varphi')\sec\zeta.\end{aligned}\right\}\qquad \text{(I; 36)}$$

Multipliziert man ferner die beiden Gleichungen (I; 35) mit $\sin\frac{z-z_0}{2}$, $\cos\frac{z-z_0}{2}$ und addiert, so folgt

$$\left.\begin{aligned} r\cos\frac{z-z_0}{2}&=r_0\cos\frac{z-z_0}{2}-\varrho\cos(\varphi-\varphi')\sec\zeta\cos\left(\frac{z+z_0}{2}-\zeta\right)\\ \text{oder}\quad \frac{r}{r_0}&=1-\nu\cos\left(\frac{z+z_0}{2}-\zeta\right)\sec\frac{z-z_0}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad \text{(I; 37)}$$

Die Formeln (I; 30), (I; 31), (I; 34), (I; 36), (I; 37) lösen das Problem, indem sie die parallaktischen Verbesserungen des Azimuts, der Zenitdistazn und der Entfernung des Mondes in aller Strenge liefern. In der Praxis genügen meist einfachere Ausdrücke. Zunächst läßt sich zeigen, daß die Azimutkorrektion immer sehr klein ist. Um die Größe μ abzuschätzen (vgl. I; 31), bedenken wir, daß

$$\varrho \sim 1, \quad \sin \pi_{☾} \sim \frac{1}{60}, \quad |\sin(\varphi - \varphi')| < \frac{1}{300}, \quad \text{also} \quad \mu < \frac{1}{18000} \operatorname{cosec} z \text{ ist.}$$

Nur wenn sich der Mond in Zenitnähe befindet, könnte μ nichtdifferentielle Werte erreichen. Diesen Fall (der zudem nur in den Tropen vorkommen kann) dürfen wir praktisch ausschließen und somit für (I; 30,) (I; 31) die stets ausreichende Näherungsformel

$$A - A_0 = \mu \sin A_0 = \varrho \sin \pi_{☾} \sin(\varphi - \varphi') \operatorname{cosec} z_0 \sin A_0 \qquad \text{(I; 38)}$$

einführen.

Wegen der Kleinheit von $\varphi - \varphi'$ und $A - A_0$ darf man statt (I; 34) immer schreiben

$$\zeta = (\varphi - \varphi') \cos A_0. \qquad \text{(I; 39)}$$

Entwickelt man in dem Ausdruck (I; 36) für ν die Funktionen $\cos(\varphi - \varphi')$ und $\sec \zeta$ in Reihen und führt (I; 39) ein, so erhält man

$$\nu = \varrho \sin \pi_{☾} \left(1 - \frac{(\varphi - \varphi')^2}{2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{(\varphi - \varphi')^2}{2} \cos^2 A_0 + \cdots\right).$$

Es ist also immer erlaubt,

$$\nu = \varrho \sin \pi_{☾} \qquad \text{(I; 40)}$$

zu setzen, da die vernachlässigten Glieder von der Ordnung

$$\sin \pi_{☾} \cdot \frac{(\varphi - \varphi')^2}{2} < \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300^2}$$

nicht merklich sind. Die Parallaxe in Zenitdistanz folgt daher aus

$$\operatorname{tg}(z - z_0) = \frac{\nu \sin[z_0 - (\varphi - \varphi') \cos A_0]}{1 - \nu \cos[z_0 - (\varphi - \varphi') \cos A_0]}. \qquad \text{(I; 41)}$$

Formel (I; 37) wird angewendet, wenn es gilt, den *scheinbaren Halbmesser* des Mondes wegen Parallaxe zu korrigieren. Ist σ der dem Beobachter erscheinende Mondhalbmesser, σ_0 der vom Erdmittelpunkt aus gesehene, so gilt nach (I; 1), wenn s der lineare Halbmesser des Mondes ist,

$$\sin \sigma = \frac{s}{r}, \quad \sin \sigma_0 = \frac{s}{r_0}.$$

Da σ und σ_0 rund 16′ betragen und daher auch für genaueste Rechnung der Sinus mit dem Bogen vertauscht werden darf, ist genügend genau

$$\sigma_0 = \sigma \frac{r}{r_0} = \sigma \left[1 - \nu \cos\left(\frac{z + z_0}{2} - \zeta\right) \sec \frac{z - z_0}{2}\right] \qquad \text{(I; 42)}$$

oder, wenn $\frac{z + z_0}{2} - \zeta = z_0 - \zeta + \frac{z - z_0}{2}$ gesetzt wird,

$$\sigma_0 = \sigma \left[1 - \nu \cos(z_0 - \zeta) - \nu \operatorname{tg} \frac{z - z_0}{2} \sin(z_0 - \zeta)\right].$$

Das letzte Glied der rechten Seite darf vernachlässigt werden, da

$$\sigma \nu \operatorname{tg} \frac{z - z_0}{2} \leqq \frac{\sigma \nu^2}{2} \sim 0\overset{''}{,}13$$

an der Grenze sechsstelliger Rechengenauigkeit und weit unter der Genauigkeitsgrenze von Mondbeobachtungen liegt. Es wird dann

$$\sigma - \sigma_0 = \sigma_0 \frac{\nu \cos(z_0 - \zeta)}{1 - \nu \cos(z_0 - \zeta)} \sim \sigma_0 \nu \cos(z_0 - \zeta). \qquad \text{(I; 43)}$$

Zusammen mit den Definitionsgleichungen (I; 39), (I; 40) liefern (I; 38), (I; 41), (I; 43) die gesuchten Verbesserungen wegen täglicher Parallaxe. Diese Formeln enthalten aber die geozentrischen Größen A_0, z_0, σ_0, von denen nur σ_0 unmittelbar gegeben ist. Statt A_0, z_0 benutzt man daher die beobachteten Werte A, z, was meist ausreicht. Andernfalls wird die Rechnung wiederholt, nachdem man A, z um die in erster Näherung erhaltenen parallaktischen Korrektionen verbessert hat.

Die Formeln (I; 30) und (I; 36) bzw. (I; 41) lassen sich gemäß Anhang B I auch durch Reihenentwicklungen ersetzen.

8. Die tägliche Aberration

Infolge der Rotation des Erdkörpers um seine Achse bewegt sich der Beobachtungsort relativ zum Erdmittelpunkt. Diese Bewegung ruft natürlich ebenso wie die jährliche Drehung der Erde um die Sonne einen Aberrationseffekt hervor. Seine Größe α wird wiederum durch (I; 23) ausgedrückt:

$$\sin \alpha = \frac{v}{c} \sin \vartheta,$$

wobei v die Relativgeschwindigkeit des Beobachtungsortes gegen den Erdmittelpunkt, c die Lichtgeschwindigkeit und ϑ den Winkel zwischen dem Gestirnsort und dem Zielpunkt der Bewegung bedeuten. Der letztere ist, da die Rotation der Erde von Westen nach Osten erfolgt, offenbar mit dem Ostpunkt des Horizonts identisch. Infolge der täglichen Aberration wird also der Gestirnsort auf dem Größtkreise, der ihn mit dem Ostpunkt verbindet,

um den Bogen α nach Osten zu verschoben. Ist $v_0 = 465$ m/sec die Rotationsgeschwindigkeit am Erdäquator, so ist unter der geozentrischen Breite φ'

$$v = 465 \cos \varphi' \text{ m/sec}.$$

Hieraus folgt mit $c = 299860$ km/sec

$$\alpha = 0\overset{''}{.}32 \cos \varphi' \sin \vartheta, \qquad \text{(I; 44)}$$

also eine außerordentlich kleine Verschiebung, die in den meisten Fällen unbedenklich vernachlässigt werden kann. Nur bei Beobachtungen, die

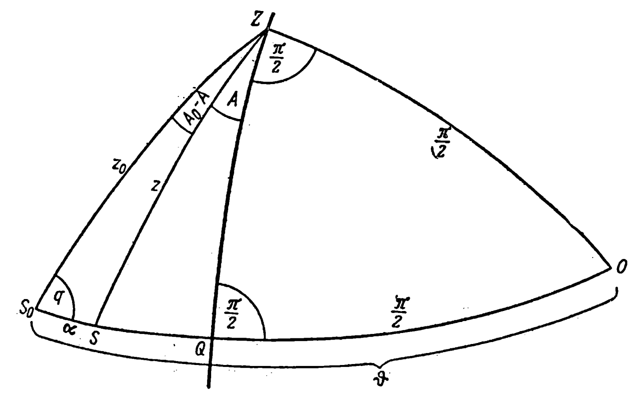


Abb. 15: Tägliche Aberration

mit großen, fest aufgestellten Instrumenten vorgenommen werden und höchste Präzision erfordern (z. B. Zeitbestimmungen), ist es notwendig, die tägliche Aberration zu berücksichtigen (siehe Abschnitt 27).

Es seien (Abb. 15): Z das Zenit, ZQ der Meridian, O der Ostpunkt, dessen Abstand von allen Punkten des Meridians (also auch von Z und Q) $\frac{\pi}{2}$ beträgt, S der beobachtete, S_0 der von der täglichen Aberration befreite Sternort, A, z bzw. A_0, z_0 deren Koordinaten im Horizontsystem. Dann liegt S auf S_0O, und es ist $S_0O = \vartheta$, $S_0S = \alpha$.

Bezeichnet man mit q den Winkel bei S_0, so ist im Dreieck S_0SZ

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha \sin q &= \sin z \sin(A_0 - A), \\ \sin\alpha \cos q &= \cos z \sin z_0 - \sin z \cos z_0 \cos(A_0 - A) \\ &= \sin(z_0 - z) + 2 \sin z \cos z_0 \sin^2 \frac{A_0 - A}{2} = \sin(z_0 - z), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I; 45)}$$

da, außer in unmittelbarer Zenitnähe, das Glied mit $\sin^2 \frac{A_0 - A}{2}$ verschwindend klein ist. In S_0ZO ist ferner

$$\left.\begin{aligned} \sin\vartheta \sin q &= \cos A_0, \\ \sin\vartheta \cos q &= \cos z_0 \sin A_0 . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I; 46)}$$

Eliminiert man q durch (I; 46) aus (I; 45), so ergibt sich

$$\sin(A_0 - A) = \frac{\sin\alpha\cos A_0}{\sin z\sin\vartheta},$$

$$\sin(z_0 - z) = \frac{\sin\alpha\cos z_0\sin A_0}{\sin\vartheta}.$$

Setzt man bei den sehr kleinen Winkeln $A_0 - A$, $z_0 - z$, α den Bogen statt des Sinus und berücksichtigt (I; 44), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} A_0 - A &= 0{,}''32\cos\varphi'\cos A\operatorname{cosec} z,\\ z_0 - z &= 0{,}''32\cos\varphi'\sin A\cos z,\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}; 47)$$

wobei rechts wegen der Kleinheit des Zahlenfaktors nach Belieben die Örter A, z oder A_0, z_0 eingesetzt werden können.

Ersetzt man in Abb. 15 das Zenit Z durch den Himmelspol P und demgemäß die Größen A, z bzw. A_0, z_0 durch t, $\frac{\pi}{2} - \delta$ bzw. t_0, $\frac{\pi}{2} - \delta_0$, so ändert sich an den geometrischen Eigenschaften der Figur nichts, da ja auch P auf dem Meridian liegt. Man erhält also für den Einfluß der täglichen Aberration auf die Koordinaten des lokalen Äquatorsystems die analogen Formeln

$$\left.\begin{aligned} t_0 - t &= 0{,}''32\cos\varphi'\cos t\sec\delta,\\ \delta_0 - \delta &= -\,0{,}''32\cos\varphi'\sin t\sin\delta.\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}; 48)$$

Aus (I; 47) und (I; 48) liest man ab, daß im Meridian die Zenitdistanz und die Deklination, im Ersten Vertikal das Azimut durch die tägliche Aberration nicht beeinflußt werden. In allen Formeln kann man ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit φ' durch φ ersetzen.

9. Die Refraktion

Bevor man die beobachteten Gestirnsörter auf den Erdmittelpunkt reduziert, um sie mit den in den Jahrbüchern gegebenen Örtern vergleichbar zu machen, ist es noch notwendig, sie von dem Einfluß der Strahlenbrechung in der Erdatmosphäre zu befreien. Da die Flächen gleicher Luftdichte im allgemeinen parallel der Geoidfläche verlaufen und die Luftdichte selbst mit der Höhe abnimmt, wird der vom Gestirn ins Auge des Beobachters gelangende Lichtstrahl in der Vertikalebene des Gestirns verbleiben und während seines ganzen Weges durch die Atmosphäre eine Krümmung nach unten erleiden. Infolge der Strahlenbrechung oder *Refraktion* wird also das Azimut eines Gestirns nicht verändert, seine Zenitdistanz aber scheinbar verkleinert. Im engeren Sinne versteht man unter „Refraktion“ den Betrag dieser Verminderung, der gleich null ist, wenn das Gestirn im Zenit steht, mit wachsender Zenitdistanz ständig zunimmt und für Gestirne am Horizont sein Maximum, die „Horizontrefraktion“ ($\sim 35'$), erreicht.

Die Schwierigkeit der Berechnung der Refraktion beruht darauf, daß sie von der Art der Abnahme der Luftdichte mit der Höhe über dem Erdboden abhängt, über deren Gesetzmäßigkeiten wir zwar auf Grund meteorologischer und aerologischer Untersuchungen einigermaßen im Bilde sind, die aber infolge der Wettervorgänge in den unteren Luftschichten starken und nicht stets kontrollierbaren Schwankungen unterworfen sind. Die Refraktion hängt nicht nur von der Gesamtmasse der über dem Beobachtungsort lagernden Luftsäule ab, die wir durch Messung des *Luftdrucks* feststellen, sondern auch von der *Temperatur* und dem *Wasserdampfgehalt* der von dem Lichtstrahl durchlaufenen Luftschichten. Da der Beobachter aber im allgemeinen die Temperatur und Feuchte nur in der Nähe des Instruments messen kann, wird die Theorie der Refraktion sich damit begnügen müssen, für die physikalischen Eigenschaften der höheren Atmosphärenschichten mittlere Verhältnisse anzunehmen, von denen im Einzelfalle nicht unerhebliche Abweichungen stattfinden können.

Immerhin reichen diese Annahmen aus, um für mäßige Zenitdistanzen die Refraktion auf Bruchteile der Bogensekunde genau zu berechnen, falls Luftdruck, Temperatur und Feuchte am Instrument bekannt sind. Erst für sehr große Zenitdistanzen ($z < 80°$) werden die Refraktionsformeln merklich ungenau und ergeben verschiedene Theorien abweichende Werte.

Beobachtet man mit kleinen Instrumenten, z. B. mit Sextanten, deren Meßgenauigkeit nicht über 10 bis 20 Bogensekunden liegt, so genügt es vollkommen, bei der Berechnung der Refraktion mittlere Werte zu benutzen, die sich auf mittlere meteorologische Daten gründen. Im Anhang F IV ist eine kleine Tafel der *mittleren Refraktion* gegeben, die für einen Luftdruck von 760 mm Hg und + 10 ° C Temperatur der (trockenen) Luft gilt. Die mittlere Refraktion verläuft für kleine und mittlere Zenitdistanzen nach dem Gesetz

$$r = \alpha \operatorname{tg} z,$$

wobei der von z abhängige Faktor α nahezu konstant und wenig kleiner als eine Bogenminute ist. Zur genaueren Berechnung der Refraktion bedient man sich der von Bessel aufgestellten Formel

$$\lg r = \lg \alpha + \lg \operatorname{tg} z + A\,(\lg B + \lg T) + \lambda \lg \gamma,$$

in der α, A, λ Funktionen der gemessenen (scheinbaren) Zenitdistanz z sind, ferner $\lg B$ vom Barometerstand, $\lg T$ von der Temperatur des Quecksilbers im Barometer und $\lg \gamma$ von der Lufttemperatur abhängen. Jede Sammlung von Hilfstafeln[1]), die den Zwecken der Geographischen Ortsbestimmung dient, enthält Tabellen, aus denen man diese Größen als Funktionen ihrer Argumente entnehmen kann. Bei noch größeren Genauigkeitsansprüchen fügt man auch Korrektionen wegen der relativen Luftfeuchtigkeit und wegen der Abnahme der Schwerkraft mit der Seehöhe hinzu.

---

[1]) Siehe die im Literaturverzeichnis aufgeführten Tafeln von Albrecht, Ambronn-Domke und Wirtz sowie die Refraktionstafeln von De Ball.

Die im Anhang F V gegebene Tafel zur logarithmischen Berechnung der Refraktion ist gekürzt den Hilfstafeln von AMBRONN-DOMKE entnommen. In ihr fällt lg T fort, da angenommen wird, daß der Barometerstand schon auf 0° Quecksilbertemperatur reduziert worden ist.

10. Die Rotation der Sphäre

Hat man die beobachteten Zenitdistanzen von dem Einfluß der Refraktion befreit und an Zenitdistanz und Azimut, soweit erforderlich, die Korrektionen wegen täglicher Parallaxe und Aberration angebracht, und hat man die so berichtigten Koordinaten A, z nach dem Formelsystem (I; 6) in t, δ umgewandelt, also die Örter auf das erste (lokale) Äquatorsystem bezogen, so ist ein unmittelbarer Vergleich zwischen diesen Örtern und denen im zweiten Äquatorsystem möglich, da beide Systeme ja nun den Erdmittelpunkt zum Ursprung haben. Gemeinsam ist ihnen ferner die Rotationsachse der Erde als Z-Achse, die Äquatorebene als XY-Ebene und die Koordinate δ.

Infolge der Rotation der Erde dreht sich das erste Äquatorsystem relativ zum zweiten um die gemeinsame Z-Achse. Diese Drehung erfolgt von Westen nach Osten, so daß die Sterne, die im zweiten (raumfesten) System ihre Örter (abgesehen von kleinen und langsamen Bewegungen infolge Präzession, Nutation, Aberration, Parallaxe und Eigenbewegung) nicht ändern, vom lokalen System aus betrachtet eine (scheinbare) Bewegung im umgekehrten Sinne ausführen. Die Sphäre der Fixsterne dreht sich also scheinbar in ostwestlicher Richtung um die Weltachse und führt somit die Fixsterne auf der lokalen Sphäre in Kreisen herum, die parallel zum Himmelsäquator verlaufen.

Die scheinbare Umdrehung der Sphäre vollzieht sich nach bürgerlichem Zeitmaß in $23^h\,56^m\,4^s\!,091$, einem Zeitabschnitt, den wir als *Sterntag* bezeichnen. Die Einheit der bürgerlichen Zeitrechnung, der 24^h umfassende *mittlere Sonnentag*, ist gleich der durchschnittlichen Zeit der scheinbaren Umläufe der *Sonne* und ist deswegen etwas länger als der Sterntag, weil die Sonne sich auf ihrer jährlichen Bahn längs der Ekliptik in östlicher Richtung gegen die Fixsterne bewegt, also der täglichen Drehung der Sphäre entgegengesetzt. Infolge dieser eigenen Bewegung verliert die Sonne in einem *tropischen Jahr* von 365,2422 mittleren Sonnentagen (d. h. in der Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt) gegenüber der scheinbaren Drehung der Sphäre genau eine Runde, und es gilt daher die Beziehung

$$365{,}2422 \text{ mittl. Sonnentage} = 366{,}2422 \text{ Sterntage}, \qquad (\text{I}; 49)$$

aus der die oben angegebene Länge des Sterntags unmittelbar folgt.

In Abb. 16 ist die gegenseitige Lage der beiden Äquatorsysteme zueinander für irgendeinen Zeitpunkt dargestellt. PZP' sei der Meridian des Beobachtungsortes, X der Frühlingspunkt und G ein Gestirn, dessen Koordinaten im ersten Äquatorsystem t, δ, im zweiten α, δ lauten. Da t vom Meri-

dian aus nach Westen, α vom Stundenkreis des Frühlingspunktes aus nach Osten gezählt wird, ist

$$\Theta = t + \alpha \qquad (I; 50)$$

der Stundenwinkel von X. Für das Zenit ($t = 0$) ist $\Theta = \alpha$.

Da wir die Rotation der Erde und daher auch die des zweiten Äquatorsystems in bezug auf das erste als gleichförmig betrachten dürfen, nimmt der Stundenwinkel des Frühlingspunktes gleichmäßig zu, und zwar in einem Sterntag um 360°. Wir können daher Θ als Zeitmaß benutzen und bezeichnen diese Größe als *Sternzeit* des Beobachtungsorts. Teilen wir, ebenso wie den mittleren Sonnentag, auch den Sterntag in 24 Stunden und diese wieder in Minuten und Sekunden ein, so entspricht eine Stunde Sternzeit einem Zuwachs von Θ um 15°. Es ist daher üblich, ebenso wie die Sternzeit Θ, gemäß (I; 50) auch die Rektaszension α und den Stundenwinkel t der Gestirne in *Zeitmaß* auszudrücken, wobei also

$$1^{h} = 15°, \quad 1^{m} = 15', \quad 1^{s} = 15'',$$

und umgekehrt

$$1° = 4^{m}, \quad 1' = 4^{s}, \quad 1'' = \frac{1^{s}}{15}$$

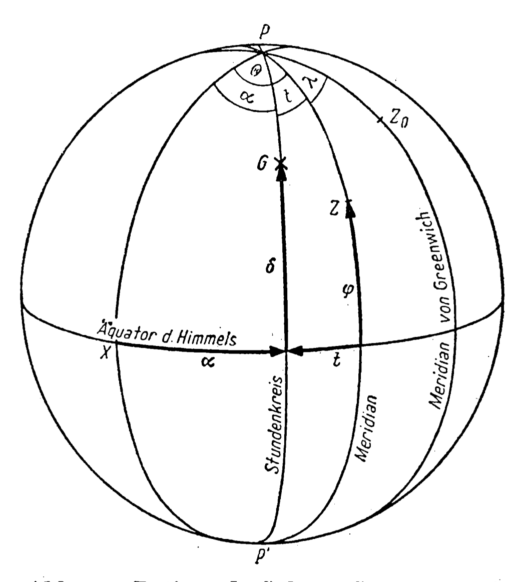


Abb. 16: Rotierende Sphäre, Sternzeit und geographische Länge

zu setzen ist. Es darf nicht vergessen werden, daß die Stunden, Minuten und Sekunden der Sternzeit eine kürzere Dauer haben als die entsprechenden Einheiten der mittleren Zeit.

Genau genommen erfolgt die scheinbare Rotation des zweiten Äquatorsystems nicht ganz gleichförmig, wie oben angenommen wurde. Die gleichmäßig fortschreitende Bewegung des Frühlingspunktes auf der Ekliptik infolge der Präzession hat auf die Gleichförmigkeit des Ablaufs der Sternzeit natürlich keinen Einfluß, wohl aber die periodische Schwankung, die der Frühlingspunkt infolge der Nutationsbewegung der Erdachse erleidet. Sie bewirkt, daß die zeitliche Änderung von Θ im Laufe einer 19jährigen Periode abwechselnd größer oder kleiner ist als im Mittel. Diese Abweichungen sind allerdings außerordentlich geringfügig, und die Unterschiede zwischen der wahren und einer mittleren (auf einen von den Nutationsschwankungen

befreiten Frühlingspunkt bezogenen) Sternzeit liegen stets unterhalb einer Zeitsekunde. Immerhin ist zu beachten, daß die Sternzeit, wie sie sich aus der Beobachtung der scheinbaren Drehung der Sphäre ergibt, kein ganz konstantes Zeitmaß ist.

Aus ihrer Definition folgt, daß die Sternzeit eine *Ortszeit*, d. h. von der geographischen Lage des Beobachtungsortes abhängig ist, denn da sie ein Stundenwinkel ist, so bezieht sie sich auf den zum Beobachtungsort gehörigen Meridian. Sei zu einem bestimmten Zeitpunkt (Abb. 16) Z das Zenit des Beobachters B und Z_0 der *gleichzeitige* Ort des Zenits von Greenwich, so bilden die Stundenkreise von Z und Z_0, d. h. die Meridiane von B und Greenwich, den Winkel λ miteinander. Ist $\bar{\Theta}$ der Stundenwinkel des Frühlingspunkts, bezogen auf den Meridian von Greenwich, d. h. die Greenwicher Ortssternzeit, so ist (Abb. 16)

$$\bar{\Theta} = \Theta + \lambda. \qquad \text{(I;51)}$$

Hierbei wird der Winkel λ vom Greenwicher Meridian nach Westen gezählt und bedeutet somit die geographische Länge von B.

Nach den Ergebnissen unserer bisherigen Überlegungen lassen sich nunmehr drei Sätze aufstellen, die das Fundament aller Methoden der Geographischen Ortsbestimmung bilden:

1. **Die geographische Breite eines Beobachtungsorts ist gleich der Höhe des Himmelsnordpols und gleich der Deklination des Zenits.**
2. **Die Sternzeit am Beobachtungsort ist gleich dem Stundenwinkel des Frühlingspunkts und gleich der Rektaszension des Zenits.**
3. **Die geographische Länge des Beobachtungsorts ist gleich der Differenz zwischen der Sternzeit des Meridians von Greenwich und der gleichzeitigen Sternzeit am Beobachtungsort.**

Eine vollständige Ortsbestimmung ist, wie man aus diesen Sätzen erkennt, nur im Zusammenhang mit einer *Zeitbestimmung* möglich. Ohne Uhr läßt sich allenfalls eine Bestimmung der geographischen Breite durchführen. Die Ermittlung der geographischen Länge ist aber nur auf dem Wege über die Ortszeit möglich. Die Methoden der Zeitbestimmung werden daher in den folgenden Kapiteln einen wichtigen Platz und breiten Raum einnehmen.

11. Der Sextant, das Ortsbestimmungsgerät des Seemannes

Fast alle astronomischen Messungen, die der Bestimmung der Ortszeit und der geographischen Koordinaten des Standortes dienen, beziehen sich auf die sphärischen Koordinaten der Gestirne im System des *Horizontes*, das ja fest mit dem Beobachtungsort verbunden ist und dessen Hauptrichtungen leicht realisierbar sind. Das letztere gilt besonders für die Z-Richtung des Systems, die *Lotrichtung*, die physikalisch eindeutig definiert ist und auf der Grundebene des Systems, der durch die Oberfläche ruhender Flüssigkeiten (Meeresoberfläche, Quecksilberhorizont) gegebenen Horizontalebene, senkrecht steht. Die *Höhen* bzw. *Zenitdistanzen* der Gestirne sind daher besonders leicht meßbare Größen und werden als Beobachtungsgrundlagen

für geographische Ortsbestimmungen bevorzugt. Die andere sphärische Koordinate im Horizontsystem, das *Azimut*, kommt erst in zweiter Linie in Betracht.

Das einfachste Instrument zur Messung von Gestirnshöhen ist der *Sextant*, der auch ganz allgemein zur Bestimmung der sphärischen Distanz zweier Gestirne benutzt werden kann. Die mit ihm zu erzielende Beobachtungsgenauigkeit ist nicht sehr groß: die gemessenen Winkel lassen sich höchstens auf 10 Bogensekunden genau ablesen. Dafür hat der Sextant, ebenso wie die ihm verwandten Instrumente (Oktant, Quadrant, Spiegelkreis), den großen Vorteil, keinen festen Standpunkt zu erfordern — er wird während der Beobachtung in freier Hand gehalten und ist daher das gegebene Instrument für den Seemann, der auf dem ständig schwankenden Boden des Schiffes kein Gerät verwenden kann, das einer festen Aufstellung bedarf.

Der Sextant (Abb. 17) besteht aus einem leichten Gestell in Form eines Kreissektors, der den sechsten Teil eines Vollkreises umfaßt und an seinem Rande einen mit fein geteilter Skala versehenen Kreisbogen von etwas mehr als 60° Länge trägt. Um den Mittelpunkt A des Kreises läßt sich ein drehbarer Arm AC, die *Alhidade*, bewegen, der in A einen auf der Sextantenebene senkrecht stehenden Spiegel und in C einen Nonius trägt, mit dessen Hilfe die jeweilige Stellung der Alhidade auf der Skala genau abgelesen werden kann. Die Alhidade läßt sich bei C festklemmen und dann mit Hilfe einer Feinbewegung noch um kleine Beträge verschieben. Fest mit dem Gestell verbunden ist der ebenfalls auf der Sextantenebene senkrecht stehende Spiegel B, der nur in seiner unteren Hälfte belegt, in der oberen aber durchsichtig ist. Auf ihn ist das Fernrohr F gerichtet, das ebenfalls fest auf dem Gestell aufmontiert ist, und zwar so, daß ein von A aus den Spiegel B treffender Lichtstrahl gerade in die optische Achse des Fernrohrs hinein reflektiert wird.

Der Nullpunkt der Skala (O in Abb. 17) ist nun so festgelegt, daß die Spiegel A und B parallel stehen, wenn die Alhidade auf diesen Punkt eingestellt wird. Irgendein Objekt, das mit dem Fernrohr anvisiert wird, z. B. ein Stern, erscheint dann im Gesichtsfeld doppelt, einmal direkt durch den oberen durchsichtigen Teil des Spiegels B, einmal nach zweimaliger Reflexion an den Spiegeln A und B.

Will der Beobachter die sphärische Distanz zweier Objekte S_1 und S_2 messen (Abb. 17), so visiert er S_1 direkt an und dreht die Alhidade um den Winkel α so weit, daß das doppelt reflektierte Bild von S_2 mit dem direkten von S_1 zusammenfällt, wobei natürlich das Instrument so gehalten werden muß, daß seine Ebene mit der des größten Kreises durch S_1 und S_2 übereinstimmt. Aus den bekannten Gesetzen der Reflexion folgt unmittelbar, daß die Drehung α der Alhidade aus der Nullpunktslage heraus gerade halb so groß ist wie die Distanz β der beiden Objekte ($\beta = 2\,\alpha$). Um diesen Umstand zu berücksichtigen, ist die Skala des Sextanten gleich so eingerichtet, daß auf ihr der doppelte Winkel ($2\,\alpha$) vermerkt ist. Der Beobachter liest also die sphärische Distanz der beiden Objekte an der Skala direkt ab.

Der Beobachter auf See, der die Höhe der Sonne über der Kimm messen will, bringt den Sextanten in die Vertikalebene der Sonne, visiert die Kimmlinie direkt an und dreht die Alhidade so weit, daß das zweifach reflektierte Bild der Sonne mit dem oberen oder unteren Rand die Kimmlinie berührt. Die Ablesung am Nonius ergibt dann die Höhe des oberen bzw. unteren Sonnenrandes über der Kimm, woraus nach Berücksichtigung der Kimmtiefe und des scheinbaren Sonnenhalbmessers die scheinbare Höhe des Sonnenmittelpunktes über dem wahren Horizont folgt. Dieses Ergebnis ist dann noch wegen der Refraktion und der täglichen Sonnenparallaxe zu berichtigen.

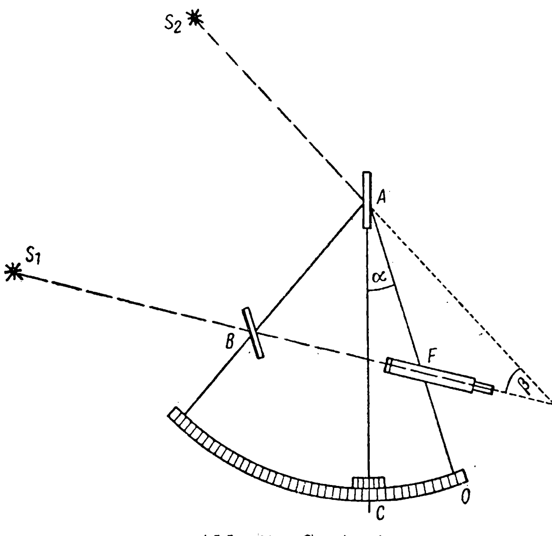


Abb. 17: Sextant

Bei Beobachtungen auf dem Festland, wo die Kimmlinie nicht sichtbar ist, hilft man sich, indem man einen Hilfsspiegel horizontal lagert und nun die sphärische Distanz der Sonne von ihrem Spiegelbild mißt. Diese Distanz ist dann gleich der doppelten Höhe. Die horizontale Lage des Hilfsspiegels, der auf einem durch drei Fußschrauben regulierbaren Gestell ruht, läßt sich mit einem Niveau (Libelle) recht genau kontrollieren. Besser ist es, einen „Quecksilberhorizont" (eine flache mit Quecksilber gefüllte Schale) zu benutzen, dessen spiegelnde Oberfläche immer genau horizontal liegt. Um eine Kräuselung der Quecksilberoberfläche durch Wind zu verhindern, schützt man dieses Hilfsgerät durch ein darübergesetztes giebelförmiges Schutzdach aus planparallelen Glasplatten.

Der hauptsächlichste Instrumentalfehler des Sextanten, der bei jeder Beobachtung berücksichtigt und wegen seiner Veränderlichkeit von Zeit zu Zeit neu bestimmt werden muß, ist der Nullpunktsfehler. Er läßt sich ermitteln, indem man die Alhidade in die Nullstellung bringt und mit Hilfe der Feinbewegung das anvisierte Objekt mit dem doppelt reflektierten Bild zur Deckung bringt. Der an der Skala abgelesene Winkel (der auch < 0 sein kann) entspricht dem wahren Nullpunkt der Skala und ist von jedem Beobachtungsergebnis abzuziehen. Bei Verwendung der Sonne zur Bestimmung des Nullpunktsfehlers läßt man das direkte und das doppelt reflektierte Bild der Sonnenscheibe sich mit den Rändern berühren, und zwar einmal von der einen, ein anderes Mal von der entgegengesetzten Seite her. Sind die beiden Ablesungen an der Skala a_1 und a_2 (wobei $a_1 > a_2$ sein möge), so ist

$^1/_2(a_1 + a_2)$ die Nullpunktslage, $-\,^1/_2(a_1 + a_2)$ die Nullpunktskorrektion, während $^1/_2\,(a_1 - a_2)$ den scheinbaren Halbmesser der Sonne als Kontrollergebnis liefert.

Auf die übrigen Instrumentalfehler dieses Instruments soll hier nicht näher eingegangen werden — eine vollständige Theorie des Sextanten findet der Leser in vielen einschlägigen Lehrbüchern der Sphärischen Astronomie, so z. B. in kaum zu übertreffender Ausführlichkeit in dem Lehrbuch von F. Brünnow (siehe Literaturverzeichnis). Diese Fehler können die verschiedensten Ursachen haben, von denen hier nur einige aufgezählt werden mögen: die Spiegel A und B stehen nicht genau senkrecht auf der Sextantenebene; die optische Achse des Fernrohrs, die durch ein Fadenkreuz im Gesichtsfeld versinnbildlicht wird, hat gegen die Sextantenebene eine geringe Neigung; der Drehpunkt der Alhidade fällt nicht mit dem Mittelpunkt des die Skala tragenden Kreisbogens zusammen (Exzentrizitätsfehler); die Teilung der Skala ist fehlerhaft. Durch sorgfältige Justierung des Instrumentes lassen sich einige dieser Fehlerquellen so gut beseitigen, daß ihre Einflüsse weit unter die natürliche Grenze der Beobachtungsgenauigkeit fallen. Die Wirkung der Exzentrizität und der Skalenfehler kann man bestimmen, wenn man bekannte Winkel verschiedener Größe (z. B. die wegen Refraktion verbesserten sphärischen Abstände hellerer Fixsterne) mißt und die Ergebnisse der Messung mit den wahren Werten vergleicht.

Da der Sextant, dessen Kreisbogen rund 60° umfaßt, Distanzen bis zu 120° zu messen erlaubt, reicht er zur Bestimmung von Sonnenhöhen auf See völlig aus, ebenso der ähnlich konstruierte *Oktant*, dessen Skala nur wenig über 90° geht. Ist man dagegen gezwungen, einen künstlichen Horizont zu benutzen und daher doppelte Sonnenhöhen zu messen, kann es vorkommen, daß die Skala zu kurz ist — selbst in unseren Breiten erreicht die Sonne zur Zeit des Sommersolstitiums Mittagshöhen über 60°. Diesen Übelstand vermeiden die *Spiegelkreise*, die mit einem fein geteilten Vollkreis versehen sind. Die um den Kreismittelpunkt drehbare Alhidade erstreckt sich längs eines Durchmessers und trägt zwei einander gegenüberliegende Nonien. Liest man beide Nonien ab und bildet das arithmetische Mittel der beiden Ablesungen, so fällt der Exzentrizitätsfehler heraus.

12. Das Universalinstrument

Während der Sextant nur zur Messung von Gestirnshöhen und — was insbesondere bei Bestimmungen der geographischen Länge auf See wichtig ist (siehe Abschnitt 60) — sphärischen Gestirnsabständen geeignet ist, dient das *Universalinstrument* sowohl zur Messung von Höhen als auch von Azimuten. Es besteht im wesentlichen aus einem Fernrohr, das um eine horizontale und eine vertikale Achse (die „*Kippachse*" und die „*Standachse*") meßbar gedreht werden kann. Als tragbares Gerät, das aber bei Benutzung einer festen Aufstellung bedarf, ist es bei Expeditionen zu Lande für alle Methoden der Zeit- und Ortsbestimmung verwendbar. Je nach Größe und Ausführung des Instrumentes ist die Beobachtungsgenauigkeit sehr verschieden: selbst kleinere Reisegeräte gestatten Winkelmessungen, die be-

deutend genauer sind als die mit Sextanten erzielbaren; große Instrumente dieser Art, die man auf Sternwarten findet (Altazimute oder, wenn sie nur zur Messung von Zenitdistanzen dienen, Vertikalkreise genannt), gehören zu den besten Präzisionsgeräten, die dem Astronomen zur Verfügung stehen.

Das Universalinstrument besitzt zwei fein geteilte Kreise, einen horizontalen, den *Azimutkreis*, an dem Drehungen um die Standachse abgelesen werden können, und einen vertikalen, den *Höhenkreis*, an dem die Zenitdistanzen der beobachteten Objekte erscheinen. Die Ablesung der Kreise geschieht zur Ausschaltung der Exzentrizitätsfehler stets an zwei gegenüberliegenden Stellen — bei kleineren Instrumenten mit Hilfe von Nonien, bei größeren mit Ablesemikroskopen, in deren Gesichtsfeld ein durch eine Meßtrommel meßbar beweglicher Faden auf die Teilstriche der Kreisskalen eingestellt werden kann. Instrumente, die nur zur Azimutmessung dienen und daher keinen feingeteilten Höhenkreis besitzen, werden in der Geodäsie bei der Vermessung ebenen Geländes verwendet und heißen *Theodolithe*.

Wenn wir von der Festlegung der Nullpunkte der Kreisskalen absehen, muß ein fehlerfrei konstruiertes und aufgestelltes Universalinstrument drei Bedingungen erfüllen: die Standachse muß genau vertikal, die Kippachse genau horizontal sein, und die Achse (Visier- oder Absehenlinie) des Fernrohrs, die durch den Schnittpunkt eines horizontalen und eines vertikalen Fadens (Fadenkreuz) im Gesichtsfeld definiert wird, muß genau senkrecht auf der Kippachse stehen. Darüber hinaus ist erforderlich, daß die beiden Achsen des Instruments auf den Ebenen der zugehörigen Kreise senkrecht stehen (was aber mechanisch immer mit genügender Genauigkeit erreicht wird) und auch genau durch deren Mittelpunkte verlaufen. Die Exentrizitätsfehler, die entstehen, wenn diese letzte Forderung nicht genau erfüllt ist, werden, wie schon erwähnt, dadurch eliminiert, daß die Kreise an zwei gegenüberliegenden Stellen abgelesen und die beiden Ergebnisse gemittelt werden.

Die oben genannten drei Bedingungen sind nun immer mehr oder weniger ungenau erfüllt, was teils an Unvollkommenheiten der Konstruktion (Instrumentalfehler), teils an der fehlerhaften Aufstellung des Instrumentes (Aufstellungsfehler) liegt. Verlängern wir die drei durch das Instrument gegebenen Richtungen, die der Achse des Fernrohrs und die der beiden Achsen des Instruments, bis zur Sphäre, so ergibt sich das in Abb. 18 gezeichnete Bild:

Die Standachse zielt nach Z', das Kreisende der Kippachse (d. h. dasjenige Ende der horizontalen Achse, das den zur Ablesung der Zenitdistanz bestimmten Kreis trägt) nach K, die Visierlinie des Fernrohrs nach einem auf das Fadenkreuz eingestellten Gestirn G, dessen Koordinaten im System des Horizontes A (Azimut) und z (Zenitdistanz) sein mögen. Bei verschwindenden Aufstellungs- und Instrumentalfehlern müßte Z' mit dem Zenit Z zusammenfallen, K bei jeder Drehung des Instruments um die Standachse stets auf dem wahren Horizont HR liegen und der Bogen KG genau 90° betragen. In Wirklichkeit habe Z', das *instrumentelle Zenit*, von Z den kleinen Abstand i und der zu Z' als Pol gehörige größte Kreis $H'R'$, der *instrumentelle*

Horizont, gegen den wahren Horizont die Neigung i. Der Punkt K möge über dem wahren Horizont die Höhe b, über dem instrumentellen Horizont die Höhe $-c'$ haben. Die Bögen KZ und KZ' sind also $\frac{\pi}{2} - b$ bzw. $\frac{\pi}{2} + c'$. Der stets sehr kleine Winkel c', ein unveränderlicher Instrumentalfehler, heißt der *Kollimationsfehler der Achsen*. Der Bogen KG habe die Länge $\frac{\pi}{2} + c$; die kleine Größe c heißt *Kollimationsfehler des Fernrohrs*. Durch Parallelverschiebung des Vertikalfadens im Fernrohr mit Hilfe von Justierschrauben kann c klein gehalten und praktisch zum Verschwinden gebracht werden. Enthält das Fadennetz mehrere parallele Vertikalfäden, so gilt c für den Mittelfaden, während die symmetrisch zu ihm angeordneten Seitenfäden ihre eigenen Kollimationsfehler haben.

Bei Azimutbestimmungen mit dem Universalinstrument werden zunächst immer nur *relative Azimute* gemessen, d. h. Azimutdifferenzen gegen einen beliebigen Nullvertikal, dessen Azimut in bezug auf den südlichen Bogen des Meridians dann nötigenfalls durch gesonderte Beobachtungen bestimmt werden muß (siehe Abschn. 24). Es ist daher nicht nötig, das Instrument von vornherein so aufzustellen, daß bei Anvisieren eines im Süden kulminierenden Sternes am Azimutkreis 0° abgelesen wird. Wir können also zunächst die Zählung der Azimute bei einem beliebigen Vertikal beginnen lassen und wählen dafür zweckmäßig den Vertikal von Z', da dieser dem wahren und dem instrumentellen Horizontsystem gemeinsam ist. In bezug auf ZZ' als Nullvertikal habe G im wahren Horizontsystem die Koordinaten a, z, im instrumentellen die Koordinaten a', z'. Die entsprechenden Koordinaten von K seien $a_0, \frac{\pi}{2} - b$ bzw. $a_0', \frac{\pi}{2} + c'$.

Bei Einstellung des Fadenkreuzes auf G werden an den Kreisen das Azimut A_0 und die Zenitdistanz z_0 abgelesen. Es ist dann die Aufgabe zu lösen, aus A_0, z_0 die wahren Koordinaten a, z bzw. (in bezug auf den Meridian als Nullvertikal) A, z abzuleiten, wenn die Aufstellungs- und Instrumentalfehler sowie die Nullpunktskorrektionen der Kreise, über deren Ermittlung weiter unten das Nötige gesagt werden wird, bekannt sind.

Aus dem Dreieck $ZZ'K$ (Abb. 18) erhält man mit ZK als Grundseite nach dem Cosinussatz

$$\sin b = -\sin c' \cos i - \cos c' \sin i \cos a'_0$$

oder, wenn b, c', i als klein angesehen und daher die Sinus dieser Winkel gleich den Bögen, die Cosinus gleich Eins gesetzt werden,

$$b = -(c' + i \cos a'_0). \qquad \text{(I; 52)}$$

Aus dem Dreieck $Z'KG$ folgt nach dem Cosinussatz

$$-\sin c = -\sin c' \cos z' + \cos c' \sin z' \cos (a' - a_0'),$$

daher für kleines c, c'

$$-c = -c' \cos z' + \sin z' \sin \left[\frac{\pi}{2} - (a' - a_0')\right]$$

oder, da K sehr nahe beim Pol von $Z'G$ liegt, und daher der Winkel $\frac{\pi}{2} - (a' - a_0')$ sehr klein ist,

$$\frac{\pi}{2} - (a' - a_0') = -c \operatorname{cosec} z' + c' \operatorname{ctg} z',$$

woraus

$$a' = \frac{\pi}{2} + a_0' + c \operatorname{cosec} z' - c' \operatorname{ctg} z' \text{ (Kreis links)} \qquad (\text{I};53)$$

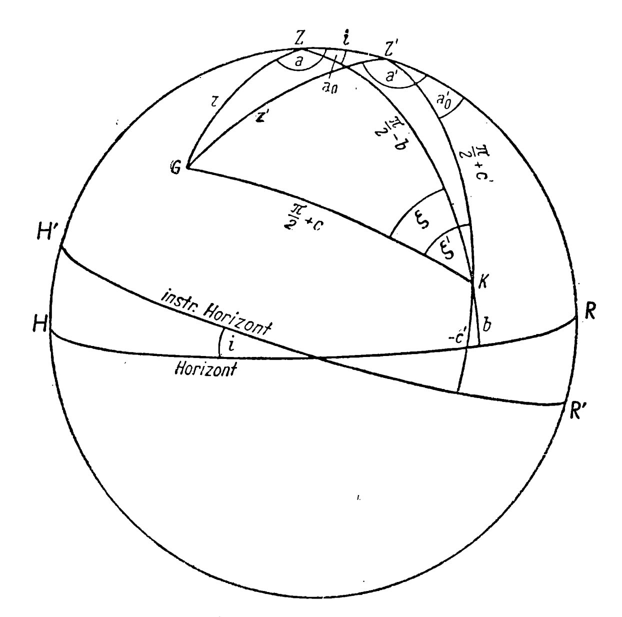


Abb. 18: Zur Theorie des Universalinstruments

folgt. Diese Formel gilt für den in Abb. 18 gezeichneten Fall, daß das Kreisende der Kippachse links vom Beobachter liegt. Da a_0' bis auf Konstante die Ablesung A_0' des Azimutkreises angibt, dürfen wir

$$\frac{\pi}{2} + a_0' = A_0' + x \qquad (\text{I}; 53\text{a})$$

setzen, wobei x eine noch zu bestimmende konstante Korrektion des abgelesenen Azimuts bedeutet.

Liegt das Kreisende der Kippachse rechts vom Beobachter, was man dadurch erreichen kann, daß man das Instrument im Azimut um 180° dreht

und das Fernrohr durch die Zenitlage hindurch wiederum auf G richtet, so erscheint in Abb. 18 das Dreieck $Z'KG$ um $Z'G$ umgeklappt. K hätte in der neuen Lage das neue Azimut $a_0'' = a_0' + 2\,(a' - a_0')$, und der Winkel $a' - a_0'$ ginge in $a_0'' - a'$ über. Man erhält dann statt (I; 53)

$$a' = a_0'' - \frac{\pi}{2} - c \operatorname{cosec} z' + c' \operatorname{ctg} z' \text{ (Kreis rechts)}, \qquad \text{(I; 54)}$$

wobei man wieder

$$a_0'' - \frac{\pi}{2} = A_0'' + x \qquad \text{(I; 54a)}$$

setzen darf, wenn $A_0'' + \pi$ die neue Kreisablesung bedeutet.

Aus Dreieck $Z'KG$ findet man nach dem Cosinussatz

$$\cos z' = \sin c \sin c' + \cos c \cos c' \cos \zeta'$$

oder für kleines c, c' bis zur zweiten Ordnung

$$\cos z' = cc' + \left(1 - \frac{c^2 + c'^2}{2}\right) \cos \zeta'$$

oder

$$\cos z' - \cos \zeta' = 2 \sin \frac{\zeta' - z'}{2} \sin \frac{\zeta' + z'}{2} = cc' - \frac{c^2 + c'^2}{2} \cos \zeta'.$$

Wegen des kleinen Faktors $2 \sin \frac{\zeta' - z'}{2} \sim \zeta' - z'$, der offenbar von der zweiten Ordnung in c, c' ist, dürfen wir

$$\sin \frac{\zeta' + z'}{2} = \sin \zeta'$$

setzen und erhalten

$$z' = \zeta' - cc' \operatorname{cosec} \zeta' + \frac{c^2 + c'^2}{2} \operatorname{ctg} \zeta'. \qquad \text{(I; 55)}$$

Desgleichen ergibt sich aus Dreieck ZKG die entsprechende Formel

$$z = \zeta + cb \operatorname{cosec} \zeta + \frac{c^2 + b^2}{2} \operatorname{ctg} \zeta \qquad \text{(I; 55a)}$$

durch Vertauschung von z' mit z, ζ' mit ζ und c' mit $-b$. Abgesehen von dem Fall sehr kleiner Zenitdistanzen, in dem die beiden letzten Glieder der rechten Seiten von (I; 55) und (I; 55a) unter Umständen merklich werden, darf man also immer $z = \zeta$ und $z' = \zeta'$ setzen.

Aus dem Dreieck $ZZ'K$ folgt nach dem Sinussatz

$$\cos b \,\sin (\zeta' - \zeta) = \sin i \,\sin a_0',$$

also genähert, wenn man noch rechts nach (I; 53) $a_0' = a' - \frac{\pi}{2}$ setzt,

$$\zeta = \zeta' + i \,\cos a'.$$

Setzt man dies in (I; 55a) ein, so wird, da man in den Gliedern zweiter Ordnung $\zeta = z$ setzen darf,

$$z = \zeta' + i \cos a' + cb \operatorname{cosec} z + \frac{c^2 + b^2}{2} \operatorname{ctg} z. \qquad \text{(I; 56)}$$

Nun ist ζ', wie aus Abb. 18 unmittelbar ersichtlich, die am Höhenkreis abgelesene instrumentelle Zenitdistanz z_0 bis auf eine konstante Nullpunktskorrektion Δz. Ist der Höhenkreis so eingeteilt, daß z_0 vom Zenitpunkt aus nach beiden Seiten von 0 bis 180° wächst, so muß, da in den beiden Kreislagen z_0 auf verschiedenen Seiten vom Zenitpunkt abgelesen wird, Δz das eine Mal addiert, das andere Mal subtrahiert werden. Die wahre Zenitdistanz ergibt sich also aus z_0 nach der Formel

$$z = z_0 \pm \Delta z + i \cos a' + cb \operatorname{cosec} z + \frac{c^2 + b^2}{2} \operatorname{ctg} z, \qquad \text{(I; 57)}$$

in der die Glieder zweiter Ordnung in c, b nur bei sehr kleinen Zenitdistanzen ins Gewicht fallen.

Schließlich erhält man aus dem Dreieck $ZZ'G$ mit ZG als Grundseite nach dem Sinus- und dem Sinus-Cosinussatz

	(I)	(II)
$\sin z \sin a = \sin z' \sin a'$,	$\cos a'$	$\sin a'$
$\sin z \cos a = \cos z' \sin i + \sin z' \cos i \cos a'$		
$= i \cos z' + \sin z' \cos a'$.	$-\sin a'$	$\cos a'$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den Faktoren (I) und (II) und addiert, so findet man

$$\text{(I)} \quad \sin z \sin (a - a') = - i \cos z' \sin a',$$
$$\text{(II)} \quad \sin z \cos (a - a') = i \cos z' \cos a' + \sin z'.$$

Schließen wir sehr kleine Zenitdistanzen aus, bei denen Azimutbestimmungen unsicher sind und daher in der Praxis auch vermieden werden, so zeigt (I), daß $a - a'$ klein von der Ordnung i ist. Man darf also in (II) $\cos(a - a') = 1$ setzen und erhält dann

$$\sin z - \sin z' = i \cos z' \cos a'.$$

Ersetzt man also in (I) $\sin z$ durch $\sin z'$, so begeht man auf der linken Seite einen Fehler zweiter Ordnung, und es folgt daher

$$a = a' - i \operatorname{ctg} z' \sin a'.$$

Setzt man nun für a' die Ausdrücke (I; 53), (I; 53a) bzw. (I; 54), (I; 54a) ein, so erhält man

$$a = A_0 + x \pm c \operatorname{cosec} z' \mp (c' \pm i \sin a') \operatorname{ctg} z',$$

wobei das obere Vorzeichen für Kreis links, das untere für Kreis rechts gilt. Wegen (I; 52) und $a' \sim a_0' \pm \frac{\pi}{2}$ ist aber

$$b = -(c' \pm i \sin a') \qquad (I; 58)$$

und daher

$$a = A_0 + x \pm c \operatorname{cosec} z' \pm b \operatorname{ctg} z',$$

wobei man noch z' durch z ersetzen darf. Nun bedeutet x die Korrektion des abgelesenen Azimuts auf den Vertikal ZZ'. Vereinigen wir diese mit dem Azimut dieses Vertikals in bezug auf den Meridian und bezeichnen die Summe beider Korrektionen mit ΔA, so erhalten wir für das wahre Azimut von G

$$A = A_0 + \Delta A \pm c \operatorname{cosec} z \pm b \operatorname{ctg} z. \qquad (I; 59)$$

Hierbei ist zu beachten, daß A_0 bei Kreis links die Ablesung A_0', bei Kreis rechts die vorher noch um 180° verminderte Ablesung A_0'' bedeutet, und daß wegen (I; 58) die Neigung b in beiden Kreislagen verschiedene Werte, b' bzw. b'', annimmt, wenn $i \neq 0$ ist.

Die Reduktion der beobachteten Koordinaten geschieht mit Hilfe der Formeln (I; 57) und (I; 59), und es ist nun nur noch nötig, zu zeigen, wie die Instrumentalkonstanten und Aufstellungsfehler bestimmt werden.

Die Neigung b der Kippachse, die im allgemeinen vom Azimut a' abhängig ist, läßt sich direkt mit Hilfe einer Libelle bestimmen, die man auf die Zapfen der Kippachse aufsetzt. Für Kreis links ist dann

$$b = -c' - i \sin a',$$

wobei $a' \sim A_0 + x$ zu irgendeiner beliebigen Einstellung A_0 am Azimutkreis gehört. Bestimmt man nun die Neigungen b_1, b_2, b_3 bei den drei Einstellungen A_0, $A_0 \pm 120°$, so ist

$$b_1 = -c' - i \sin(A_0 + x),$$

$$b_2 = -c' + \frac{i}{2} \sin(A_0 + x) - \frac{i}{2} \sqrt{3} \cos(A_0 + x),$$

$$b_3 = -c' + \frac{i}{2} \sin(A_0 + x) + \frac{i}{2} \sqrt{3} \cos(A_0 + x),$$

woraus

$$c' = -\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}; \; i \sin(A_0 + x) = \frac{b_2 + b_3 - 2b_1}{3}; \; i \cos(A_0 + x) = \frac{b_3 - b_2}{\sqrt{3}}$$

und damit c', i und x folgt. Für jedes A_0 ist damit der Näherungswert $a' = A_0 + x$ bekannt, den wir zur Berechnung des Korrektionsgliedes $i \cos a'$ in (I; 57) brauchen.

Den Kollimationsfehler c des Fernrohrs bestimmen wir, indem wir ein festes Objekt in beiden Lagen des Instruments anvisieren.

Für Kreis links und rechts ist dann nach (I; 59)

$$A = A_0' + \Delta A + c \operatorname{cosec} z + b' \operatorname{ctg} z,$$
$$A = A_0'' + \Delta A - c \operatorname{cosec} z - b'' \operatorname{ctg} z,$$

und aus der Differenz dieser Gleichungen folgt

$$c = \frac{A_0'' - A_0'}{2} \sin z - \frac{b' + b''}{2} \cos z .$$

Den Nullpunktsfehler ΔA des Azimutkreises bestimmt man am besten, indem man (I; 59) auf die Beobachtung eines Objekts mit bekanntem Azimut anwendet, z. B. (vgl. Abschnitt 24) auf einen polnahen Stern in der Stellung der „größten Digression", in der sich das Azimut einige Zeit hindurch nicht merklich verändert. Der Nullpunktsfehler Δz des Höhenkreises kann auf ähnliche Weise bestimmt werden, besser aber, indem man die Zenitdistanz eines Objekts (etwa eines polnahen Sterns in der oberen oder unteren Kulmination) in beiden Kreislagen mißt. Es ist dann wegen (I; 57), wenn z_0', z_0'' die beiden Kreisablesungen sind, bis auf Glieder zweiter Ordnung,

$$z = z_0' + \Delta z + i \cos a',$$
$$z = z_0'' - \Delta z + i \cos a' .$$

Also folgt aus der Differenz und der Summe dieser Gleichungen

$$\Delta z = \frac{z_0'' - z_0'}{2} ; \qquad z = \frac{z_0' + z_0''}{2} + i \cos a' .$$

Eine besondere Abart des Universalinstruments stellt der *Meridiankreis* dar, bei dem die horizontale Achse fest in der Ost-Westrichtung liegt, so daß das Fernrohr bei Drehung um diese Achse den Meridian des Himmels bestreicht. An die Stelle der Azimutmessung tritt bei diesem Instrument die Aufgabe, die Zeit des Durchgangs eines Gestirns durch den Meridian zu bestimmen. Fehlt der feingeteilte vertikale Kreis zur Messung von Zenitdistanzen, so heißt dieses Gerät *Passageinstrument*, und die Bestimmung der Durchgangszeit durch den Meridian (oder auch, wenn die horizontale Achse nord-südlich gerichtet ist, durch den Ersten Vertikal) ist seine einzige Aufgabe. Die Theorie des Meridiankreises und des Passageinstruments läßt sich aus der des Universalinstruments unmittelbar ableiten, wobei man nur zu beachten hat, daß der Übergang von der einen Kreislage in die andere nicht durch Drehung des Instruments, sondern durch Umlegen der Achse mitsamt dem Fernrohr in den festen Lagern geschieht, wobei also die Neigung i der Achse gegen den Horizont erhalten bleibt.

Wegen seiner Wichtigkeit für die Aufgabe der *Zeitbestimmung* ist die Theorie des Passageinstruments in Abschnitt 29 gesondert entwickelt worden; die Ableitung der dort gewonnenen Formeln aus denen des Universalinstruments sei dem Leser überlassen.

II. KAPITEL

DIE TÄGLICHE BEWEGUNG DER GESTIRNE

13. Aufgang und Untergang der Gestirne

Nach den beiden ersten der drei Fundamentalsätze, die wir am Schluß des Abschnitts 10 zusammenstellten, sind Orts-Sternzeit und geographische Breite (Polhöhe) eines Beobachtungsorts mit den Koordinaten (Rektaszension und Deklination) des Zenits identisch. Diese Koordinaten lassen sich nicht direkt beobachten, man erhält sie aber leicht aus den Beziehungen, die zwischen ihnen und den der Beobachtung zugänglichen Horizontkoordinaten der Gestirne bestehen, z. B. aus den Gleichungen (I; 6) und (I; 7), die durch Anwendung der Sätze der Sphärischen Trigonometrie auf das Pol-Zenitdreieck (Nautische Dreieck) folgen (vgl. Abb. 7). Diese Beziehungen nehmen besonders einfache Gestalt an, wenn sich die Gestirne im Augenblick der Beobachtung an gewissen ausgezeichneten Punkten ihrer scheinbaren täglichen Bahn befinden, z. B. wenn sie die Hauptkoordinatenebenen des lokalen Systems, den Horizont, den Meridian oder den Ersten Vertikal überschreiten. Das genaue Studium dieser Sonderfälle führt zu tieferen Einblicken in die Erscheinungen der täglichen Bewegung der Gestirne, deren Kenntnis für die Lösung der Probleme der Orts- und Zeitbestimmung nützlich ist.

Den Durchgang der Gestirne durch den *Horizont* bezeichnen wir als *Aufgang* bzw. *Untergang*. Im wahren Horizont des Beobachters $\left(z = \frac{\pi}{2}\right)$ nehmen die Grundformeln (I; 7) des Nautischen Dreiecks die einfachere Form

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t_0, \\ \cos A_0 &= -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos t_0, \\ \sin A_0 &= \cos\delta \sin t_0 \end{aligned}\right\} \qquad (II; 1)$$

an, wobei nach (I; 50)

$$t_0 = \Theta_0 - \alpha$$

zu setzen ist. Es bedeuten dann t_0, A_0, Θ_0 Stundenwinkel, Azimut und Sternzeit des Auf- bzw. Untergangs eines Gestirns mit den Koordinaten α, δ. Aus der ersten Gleichung (II; 1) erhält man den *Stundenwinkel des Horizontdurchgangs*:

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta \qquad (II; 2)$$

und, indem man (II; 2) in die zweite Gleichung (II; 1) einsetzt, für das *Azimut des Horizontdurchgangs*:

$$\cos A_0 = -\sec\varphi\sin\delta\,. \tag{II, 3}$$

Zur Berechnung von t_0 und A_0 sind diese Formeln ungeeignet, da sie ungenaue Werte liefern, wenn t_0 und A_0 in der Nähe von 0 oder π liegen. Es ist überhaupt zweckmäßig, Winkelgrößen nicht aus Sinus- oder Cosinusformeln, sondern aus *Tangentenformeln* zu berechnen, da diese für den ganzen Bereich des Arguments ausreichende Genauigkeit gewährleisten. Auf Grund der Identitäten

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}, \qquad \operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$$

gewinnt man aus (II; 2) nach einfacher Rechnung die Formeln

$$\operatorname{tg}\frac{t_0}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos(\varphi+\delta)}}, \quad \operatorname{tg} t_0 = \pm\frac{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}{\sin\varphi\sin\delta}. \tag{II; 4}$$

Aus (II; 3) ergibt sich auf dieselbe Weise zunächst

$$\operatorname{tg}^2\frac{A_0}{2} = \frac{\cos\varphi+\sin\delta}{\cos\varphi-\sin\delta}$$

und hieraus, wenn man statt φ die Zenitdistanz $\psi = \frac{\pi}{2}-\varphi$ des Himmelsnordpols einführt,

$$\operatorname{tg}\frac{A_0}{2} = \pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\psi+\delta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\psi-\delta}{2}}, \quad \operatorname{tg} A_0 = \pm\frac{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}{\sin\delta}. \tag{II; 5}$$

In Verbindung mit (II; 2) und (II; 3) liefert die dritte Gleichung (II; 1) folgende Beziehungen zwischen t_0 und A_0:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} t_0 &= -\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{cosec}\delta\sin A_0, \\ \operatorname{tg} A_0 &= -\cos\varphi\operatorname{ctg}\delta\sin t_0, \end{aligned}\right\} \tag{II; 6}$$

und, wenn man die zweite dieser beiden Gleichungen durch die erste dividiert und (II; 1) berücksichtigt, die einfache Formel

$$\operatorname{tg} A_0 = \sin\varphi\operatorname{tg} t_0\,, \tag{II; 7}$$

die auch aus (II; 4) und (II; 5) direkt folgt.

Aus (II; 2) folgt, daß t_0 nur dann reell ist, wenn $|\operatorname{tg}\delta| \leqq |\operatorname{ctg}\varphi|$, während (II; 3) lehrt, daß für reelles A_0 die Bedingung $|\sin\delta| \leqq |\cos\varphi|$ erfüllt sein muß. Beide Ungleichungen gelten gleichzeitig, und zwar dann und nur dann, wenn $|\delta| \leqq \frac{\pi}{2} - |\varphi|$. Alle Sterne, für die

$$|\delta| > \frac{\pi}{2} - |\varphi|, \tag{II; 8}$$

gehen nicht auf und unter, bleiben also auf ihrer täglichen Bahn stets über oder stets unter dem Horizont. Ihre Örter liegen innerhalb der beiden Polkalotten der Sphäre, deren Grenzkreise von den Himmelspolen den Abstand $|\varphi|$ haben und den Horizont im Nord- bzw. Südpunkt berühren. Diese Sterne heißen daher *Zirkumpolarsterne*. Aus (II; 8) folgt, daß an den Erdpolen $\left(\varphi = \pm \frac{\pi}{2}\right)$ alle Sterne zirkumpolar sind, während am Äquator ($\varphi = 0$) alle Sterne auf- und untergehen.

Die Gleichungen (II; 2) bis (II; 5) zeigen, daß es zwei Lösungen t_0, A_0 gibt, die symmetrisch zum Meridian liegen. In (II; 4), (II; 5) bezieht sich das positive Zeichen auf den Untergang, das negative auf den Aufgang. Auf- und Untergang finden also im gleichen Zeitabstand vom Meridiandurchgang ($t = 0$ oder π) und im gleichen Abstand vom Südpunkt ($A = 0$) bzw. Nordpunkt ($A = \pi$) statt. Das gilt allerdings nur, solange die Koordinaten α, δ des Gestirns während der zwischen Auf- und Untergang verfließenden Zeit als konstant angesehen werden dürfen. Das ist für alle Fixsterne praktisch der Fall, für Sonne und Planeten und besonders für den Mond aber nicht.

In allen bisherigen Formeln ist unter „Horizont" stets jener ideale Größtkreis der Sphäre verstanden worden, der sich mit dem sichtbaren Horizont, etwa der Kimmlinie des Meeres, nicht deckt. Der beobachtbare Auf- oder Untergang, d. h. das Auftauchen oder Verschwinden des Gestirns hinter der Kimm, fällt mit dem Augenblick, in dem der Ort (α, δ) den wahren Horizont durchschreitet, nicht zusammen, und zwar aus folgenden Ursachen:

1. Der scheinbare Horizont ist gegen den wahren um die Kimmtiefe $\varkappa$ gesenkt (Formel I; 4). Die Zenitdistanz z_0 des Auf- und Untergangs erscheint also gegen ihren theoretischen Wert $\frac{\pi}{2}$ um den Betrag $\varkappa$ vergrößert.

2. Infolge der Horizontrefraktion erscheint das Gestirn um rund $r_0 = 35'$ gehoben. Es erscheint also am Horizont, wenn es in Wirklichkeit noch (oder schon) 35′ unter dem Horizont steht. Es ist also z_0 um r_0 zu vergrößern.

3. Gestirne mit merklicher täglicher Parallaxe erscheinen im Horizont um die Horizontalparallaxe π_* gesenkt. Infolge der Parallaxe tritt also Auf- oder Untergang ein, wenn die Gestirne in Wirklichkeit (d. h. für den geozentrischen Standpunkt, auf den sich ihre Koordinaten α, δ beziehen) schon oder noch die Höhe π_* haben. Um diesen Betrag ist also z_0 zu vermindern. Da die Horizontrefraktion um mehrere Bogenminuten unsicher sein kann, ist im Vergleich mit diesem Fehler die Horizontalparallaxe der Sonne (8,″8) und der Planeten bedeutungslos. Es braucht daher nur die Parallaxe des Mondes, deren mittlerer Wert 57′ beträgt, berücksichtigt zu werden.

4. Bei Beobachtung der Auf- und Untergänge von Sonne und Mond werden nicht die Horizontdurchgänge der Mittelpunkte dieser Himmelskörper, sondern die Koinzidenz des oberen oder unteren Randes der Gestirnsscheibe mit der Kimmlinie beobachtet. Die Zenitdistanz ist also um den

scheinbaren Halbmesser σ_* zu vergrößern oder zu verkleinern, je nachdem, ob der obere oder untere Rand beobachtet wird.

Allgemein gilt für den Durchgang durch den scheinbaren Horizont (Kimm)

$$z_0 = \frac{\pi}{2} + dz_0 = \frac{\pi}{2} + \varkappa + r_0 - \pi_* \pm \sigma_* . \qquad \text{(II; 9)}$$

Ist h die Höhe des Beobachters über dem Meeresspiegel, so ist, wenn wir die mittleren Werte $r_0 = 35'$, $\sigma_\odot = \sigma_☾ = 16'$, $(\pi_\odot = 0)$, $\pi_☾ = 57'$ benutzen:

für Fixsterne . . . . $dz_0 = 1{,}'8\sqrt{h} + 35'$,

für Sonne, oberer Rand . . . . $dz_0 = 1{,}'8\sqrt{h} + 51'$,

für Sonne, unterer Rand. . . . $dz_0 = 1{,}'8\sqrt{h} + 19'$,

für Mond, oberer Rand . . . . $dz_0 = 1{,}'8\sqrt{h} - 6'$,

für Mond, unterer Rand. . . . $dz_0 = 1{,}'8\sqrt{h} - 38'$.

Wegen der Unsicherheit der Korrektion dz_0 ist auch für die mit den verbesserten Zenitdistanzen berechneten Stundenwinkel und Azimute des scheinbaren Horizontdurchgangs nur eine geringe Genauigkeit zu erwarten. Es ist daher im allgemeinen gestattet, dz_0 als Differential anzusehen, obwohl es Beträge von der Größenordnung eines Grades annehmen kann, und die entsprechenden Verbesserungen dt_0 und dA_0 der nach (II; 2) bis (II; 5) berechneten Werte t_0, A_0 nach Differentialformeln zu ermitteln. Differenzieren wir die ersten beiden Gleichungen (I; 7), indem wir δ und φ als konstant ansehen, so erhalten wir

$$\sin z\, dz = \cos\delta \sin\varphi \sin t\, dt,$$

$$\cos z \cos A\, dz = \sin z \sin A\, dA - \cos\delta \cos\varphi \sin t\, dt .$$

Setzen wir für den Horizont $z = \frac{\pi}{2}$, $t = t_0$, $A = A_0$, so folgt

$$dt_0 = \frac{dz_0}{\cos\delta \cos\varphi \sin t_0},$$

$$dA_0 = dt_0 \frac{\cos\delta \sin\varphi \sin t_0}{\sin A_0} = dz_0 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin A_0} .$$

Nach (II; 6) erhält man, wenn man für $\operatorname{tg} t_0$ und $\operatorname{tg} A_0$ die Ausdrücke (II; 4), (II; 5) einsetzt,

$$\sin t_0 = \pm \frac{\sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta)}}{\cos\varphi \cos\delta}, \quad \sin A_0 = \pm \frac{\sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta)}}{\cos\varphi}$$

und somit

$$\left.\begin{aligned} dt_0 &= \pm \frac{dz_0}{\sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta)}}, \\ dA_0 &= \pm \frac{dz_0 \sin\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta)}}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 10)}$$

wobei das obere Zeichen für den Untergang, das untere für den Aufgang gilt. Diese Korrektionen sind an den nach (II; 4), (II; 5) berechneten Stundenwinkeln bzw. Azimuten der Auf- und Untergänge anzubringen.

Aus (II; 10) geht hervor, daß dt_0 und dA_0 nicht mehr als Differentiale gelten können, wenn einer der Beträge $|\varphi - \delta|$ oder $|\varphi + \delta|$ nur wenig kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Das trifft aber [vgl. (II; 8)] für diejenigen Sterne zu, die den Grenzkreisen der Zirkumpolarsterne nahe stehen, also in der Nachbarschaft des Süd- oder Nordpunktes auf- und untergehen. Für diese Fälle sind strenge Formeln notwendig. Nach dem Tangentensatz der Sphärischen Trigonometrie [Anhang A III (7)] ist im Nautischen Dreieck, wenn man die halbe Seitensumme

$$\frac{\pi}{2} + \frac{z - \varphi - \delta}{2} = s$$

setzt,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = \frac{\sin\left(s - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin\left(s - \frac{\pi}{2} + \delta\right)}{\sin s \sin (s - z)},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi - A}{2} = \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin\left(s - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin (s - z)}{\sin s \sin\left(s - \frac{\pi}{2} + \delta\right)},$$

oder, wenn man statt s die Größe

$$\sigma = \frac{z + \varphi + \delta}{2} \qquad \text{(II; 11)}$$

einführt und demgemäß $s = \frac{\pi}{2} + \sigma - \varphi - \delta = \frac{\pi}{2} + z - \sigma$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} &= \frac{\sin (\sigma - \delta) \sin (\sigma - \varphi)}{\cos (\sigma - z) \cos \sigma}, \\ \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} &= \frac{\sin (\sigma - \delta) \cos \sigma}{\cos (\sigma - z) \sin (\sigma - \varphi)}. \end{aligned}\right| \qquad \text{(II; 12)}$$

Setzt man in (II; 11) $z = \frac{\pi}{2} + dz_0$, so ergeben sich aus (II; 12) t und A für den scheinbaren Auf- und Untergang.

14. Meridiandurchgang der Gestirne

Beim Durchgang eines Gestirns durch den *Meridian* ist $A = 0$ oder π, je nachdem der Durchgang südlich oder nördlich des Zenits stattfindet, und $t = 0$ oder π, je nachdem er oberhalb oder unterhalb der Weltachse vor sich

geht. Die Gleichungen (I; 7) liefern daher vier verschiedene Lösungen für die Zenitdistanz z_1 des Meridiandurchgangs, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(a) für } A = \pi,\ t = 0: z_1 = \delta - \varphi = -(\varphi - \delta),\\
&\text{(b) für } A = 0,\ t = 0: z_1 = \varphi - \delta,\\
&\text{(c) für } A = 0,\ t = \pi: z_1 = \pi + (\varphi + \delta),\\
&\text{(d) für } A = \pi,\ t = \pi: z_1 = \pi - (\varphi + \delta).
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II; 13)}$$

Aus Abb. 19, die den Meridianschnitt der Sphäre darstellt und in der die Bereiche dieser vier Fälle bezeichnet sind, kann man diese Formeln auch direkt ablesen, wenn man bedenkt, daß die Distanz eines Gestirns vom Himmelsnordpol $\frac{\pi}{2} - \delta$ beträgt. Auf der Nordhalbkugel der Erde (P über dem Horizont) kommt der Fall (c) nur für Meridiandurchgänge *unter* dem Horizont vor. Auf der Südhalbkugel gilt dasselbe für Fall (d).

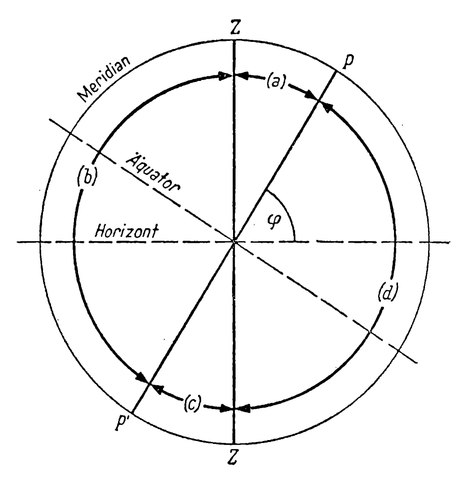


Abb. 19: Zenitdistanzen im Meridian

Jedes Gestirn überschreitet während seines scheinbaren Umlaufs den Meridian zweimal. Man bezeichnet den Meridiandurchgang oberhalb der Weltachse in den Abschnitten (a) oder (b) als *obere Kulmination*, den unterhalb der Weltachse in den Abschnitten (c) oder (d) als *untere Kulmination*. Wenn das Gestirn während der Rotation der Sphäre seine Deklination nicht verändert, fällt die obere Kulmination mit dem Minimum, die untere mit dem Maximum der Zenitdistanz zusammen.

Gemessene Meridianzenitdistanzen sind wegen Refraktion und, wenn erforderlich, auch wegen der täglichen Parallaxe zu korrigieren. Auf die *Zeit* des Meridiandurchgangs haben beide keinen Einfluß, da sie das Azimut nicht verändern. Das gilt auch für die Mondparallaxe in aller Strenge, da diese wegen des Faktors sin A in (I; 30) im Meridian verschwindet. Dagegen erreicht die Wirkung der *täglichen Aberration* auf Azimut und Stundenwinkel im Meridian ihr Maximum. Nach (I; 47), (I; 48) stellt im Meridian

$$\left.\begin{aligned}
dA_1 &= \pm\ 0{,}''32 \cos\varphi \operatorname{cosec} z_1,\\
dt_1 &= \pm\ 0{,}''32 \cos\varphi \sec\delta
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II; 14)}$$

den Betrag dar, um den man das beobachtete A_1 bzw. t_1 korrigieren muß, um es von der täglichen Aberration zu befreien. Da die scheinbare Ver-

schiebung des Gestirns nach Osten zu erfolgt, ist dA_1 positiv, wenn das Gestirn südlich des Zenits kulminiert, und dt_1 positiv in der oberen Kulmination.

Wegen ihrer Kleinheit läßt man die Korrektionen (II; 14) meist unberücksichtigt. Bei genauen Zeitbestimmungen mit Meridianinstrumenten dürfen sie nicht vernachlässigt werden. Davon wird in Abschnitt 29 die Rede sein.

15. Durchgang durch den Ersten Vertikal

Setzen wir in den Gleichungen (I; 7) $A = \pm \frac{\pi}{2}$, so ergeben sich die Bedingungen für den Durchgang der Gestirne durch den *Ersten Vertikal.* Bezeichnen wir mit z_2, t_2 Zenitdistanz und Stundenwinkel des Durchgangs durch diesen ausgezeichneten Kreis, so wird

$$\left.\begin{aligned} \cos z_2 &= \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t_2\,, \\ 0 &= -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos t_2\,, \\ \sin z_2 &= \pm \cos\delta \sin t_2, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 15)}$$

wobei in der letzten Formel das obere Zeichen gilt, wenn der Durchgang *westlich* des Zenits erfolgt.

Aus der zweiten Gleichung (II; 15) erhält man für den *Stundenwinkel* des Durchgangs durch den Ersten Vertikal

$$\cos t_2 = \operatorname{tg}\delta \operatorname{ctg}\varphi \qquad \text{(II; 16)}$$

und , setzt man dies in die erste Gleichung (II; 15) ein, für die Zenitdistanz im Ersten Vertikal

$$\cos z_2 = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}. \qquad \text{(II; 17)}$$

Aus (II; 16), (II; 17) ergeben sich in der gleichen Weise wie (II; 4), (II; 5) aus (II; 2), (II; 3) die Tangentenformeln

$$\operatorname{tg}\frac{t_2}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi+\delta)}}, \quad \operatorname{tg} t_2 = \pm \frac{\sqrt{\sin(\varphi-\delta)\sin(\varphi+\delta)}}{\cos\varphi \sin\delta}, \qquad \text{(II; 18)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{z_2}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{\varphi-\delta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\varphi+\delta}{2}}, \quad \operatorname{tg} z_2 = \frac{\sqrt{\sin(\varphi-\delta)\sin(\varphi+\delta)}}{\sin\delta}. \qquad \text{(II; 19)}$$

In Verbindung mit (II; 16) und (II; 17) liefert die dritte Gleichung (II; 15) folgende weiteren Zusammenhänge zwischen t_2 und z_2:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} t_2 &= \pm \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec}\delta \sin z_2, \\ \operatorname{tg} z_2 &= \pm \sin\varphi \operatorname{ctg}\delta \sin t_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 20)}$$

und, wenn man diese beiden Formeln dividiert und (II; 15) erneut berücksichtigt,

$$\operatorname{tg} z_2 = \pm \cos\varphi \operatorname{tg} t_2, \qquad \text{(II; 21)}$$

was auch direkt aus dem Vergleich zwischen (II; 18) und (II; 19) folgt. Die positiven Vorzeichen gelten stets für den Durchgang westlich des Zenits.

Gleichung (II; 16) ergibt nur dann reelle Lösungen t_2, wenn $|\operatorname{tg}\delta| \leqq |\operatorname{tg}\varphi|$, ebenso liefert (II; 17) reelle Zenitdistanzen nur, wenn $|\sin\delta| \leqq |\sin\varphi|$ ist. Beide Ungleichungen führen auf die Bedingung

$$|\delta| \leqq |\varphi| \qquad \text{(II; 22)}$$

dafür, daß das Gestirn auf seiner täglichen Bahn den Ersten Vertikal überschreitet. Das Gleichheitszeichen gilt für Sterne, die durch das Zenit ($\delta = \varphi$) oder das Nadir ($\delta = -\varphi$) gehen, in welchen Punkten ihre Bahn den Ersten Vertikal berührt. Am Äquator ($\varphi = 0$) erfüllen nur Sterne des Himmelsäquators ($\delta = 0$) die Bedingung (II; 22), ihre Bahn fällt ganz mit dem Ersten Vertikal zusammen. An den Polen gehen alle Sterne durch den Ersten Vertikal oder, genauer ausgedrückt, durch alle Vertikale, da ja an den Polen die Begriffe des Azimuts und der Himmelsrichtungen ihren Sinn verlieren, und somit keiner der Vertikale vor den anderen ausgezeichnet ist.

Die Durchgangszeit durch den Ersten Vertikal wird durch Refraktion und tägliche Aberration nicht beeinflußt, da beide nur die Zenitdistanz, nicht aber das Azimut verändern. Dagegen ergibt sich eine kleine Korrektion wegen der täglichen Parallaxe, die aber nur für den Mond merkliche Beträge erreicht.

16. Azimut und Zenitdistanz der Gestirne als Funktionen der Zeit

Die Grundformeln des Nautischen Dreiecks:

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t\,,\\ \sin z\cos A &= -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t\,,\\ \sin z\sin A &= \cos\delta\sin t\,,\\ t &= \Theta - \alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 23)}$$

stellen Azimut und Zenitdistanz eines Sternes (α, δ) unter der geographischen Breite φ als Funktionen der Sternzeit Θ dar. Sind α, δ konstant, was bei *Fixsternen* immer mit genügender Näherung angenommen werden darf, so kann die Abhängigkeit von Θ durch die von t ersetzt werden und erweist sich als sehr einfach, da t nur explizit vorkommt.

Einige wichtige Eigenschaften der Funktionen $z(t)$ und $A(t)$ ergeben sich aus der Diskussion ihrer ersten beiden Ableitungen. Sehen wir φ, α, δ als konstant an, so erhalten wir durch Differenzieren der Gleichungen (II; 23)

$$\left.\begin{aligned} \sin z\,dz &= \cos\delta\cos\varphi\sin t\,dt,\\ \cos z\cos A\,dz - \sin z\sin A\,dA &= -\cos\delta\sin\varphi\sin t\,dt,\\ \cos z\sin A\,dz + \sin z\cos A\,dA &= \cos\delta\cos t\,dt,\\ dt &= d\Theta\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 24)}$$

Aus der ersten Gleichung (II; 24) folgt

$$\sin z \frac{dz}{dt} = \cos\delta \cos\varphi \sin t \qquad \text{(II; 25)}$$

und aus den beiden nächsten

$$\left.\begin{aligned} \cos z \frac{dz}{dt} &= \cos\delta\,(\cos t \sin A - \sin t \cos A \sin\varphi), \\ \sin z \frac{dA}{dt} &= \cos\delta\,(\cos t \cos A + \sin t \sin A \sin\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 26)}$$

Ist (siehe Abb. 7) p der *parallaktische* Winkel im Nautischen Dreieck, so erhält man durch Anwendung der Grundformeln der Sphärischen Trigonometrie [Anhang A I (2)]:

$$\left.\begin{aligned} \cos p &= \cos t \cos A + \sin t \sin A \sin\varphi, \\ \sin p \cos z &= \cos t \sin A - \sin t \cos A \sin\varphi, \\ \sin p \sin z &= \sin t \cos\varphi\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 27)}$$

Wendet man (II; 27) auf die rechten Seiten von (II; 26) an, so findet man

$$\frac{dz}{dt} = \cos\delta \sin p\,, \quad \sin z \frac{dA}{dt} = \cos\delta \cos p\,. \qquad \text{(II; 28)}$$

Aus dem Nautischen Dreieck folgt ferner auch

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos A, \\ \cos\delta \cos p &= \sin\varphi \sin z + \cos\varphi \cos z \cos A, \\ \cos\delta \sin p &= \cos\varphi \sin A, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 29)}$$

so daß man statt (II; 28)

$$\frac{dz}{dt} = \cos\varphi \sin A\,, \quad \frac{dA}{dt} = \sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{ctg} z \cos A \qquad \text{(II; 30)}$$

setzen kann.

Für die zweite Ableitung der Zenitdistanz erhält man aus (II; 25)

$$\sin z \frac{d^2 z}{dt^2} = -\cos z \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \cos\delta \cos\varphi \cos t \qquad \text{(II; 31)}$$

oder aus (II; 30)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \cos\varphi \cos A \frac{dA}{dt}\,. \qquad \text{(II; 32)}$$

Differenziert man die zweite Gleichung (II; 30), so folgt zunächst

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -\frac{\cos\varphi \cos A}{\sin^2 z} \frac{dz}{dt} - \cos\varphi \operatorname{ctg} z \sin A \frac{dA}{dt} \qquad \text{(II; 33)}$$

oder, wenn man im letzten Gliede $\cos\varphi \sin A$ durch $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dA}{dt}$ durch (II; 28) ersetzt:

$$\sin^2 z \frac{d^2A}{dt^2} = -\frac{dz}{dt}(\cos A \cos\varphi + \cos z \cos\delta \cos p)\,.$$

Drückt man auf der rechten Seite $\cos\delta \cos p$ durch die zweite Gleichung (II; 29) aus und setzt sodann gemäß der ersten Gleichung (II; 29)

$$\cos A \cos\varphi = \frac{\sin\varphi \cos z - \sin\delta}{\sin z}\,,$$

so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\sin^3 z \frac{d^2A}{dt^2} = \sin\delta \frac{dz}{dt}\left(1 - 2\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}\cos z + \cos^2 z\right). \qquad \text{(II; 34)}$$

Extrema der Zenitdistanz $\left(\frac{dz}{dt} = 0\right)$ treten nach (II; 30) ein, wenn $\sin A = 0$, also im Meridian. Setzt man in (II; 31) $\frac{dz}{dt} = 0$, so findet man, daß an den Extremen der Zenitdistanz die zweite Ableitung das Vorzeichen von $\cos t$ hat, da $\sin z$, $\cos\delta$ und $\cos\varphi$ immer positiv sind. Die Zenitdistanz hat also in der oberen Kulmination ($t = 0$) ein Minimum, in der unteren ($t = \pi$) ein Maximum, was schon in Abschnitt 14 bemerkt wurde.

Extrema des Azimuts $\left(\frac{dA}{dt} = 0\right)$ treten nach (II; 28) ein, wenn $\cos p = 0$. Es ist dann der parallaktische Winkel $p = \pm\frac{\pi}{2}$, je nachdem, ob das Extremum westlich oder östlich des Meridians stattfindet. Der Vertikal des Gestirns steht dann auf dessen Stundenkreis senkrecht. Wir bezeichnen diese Stellungen des Gestirns als *größte* (westliche oder östliche) *Digression.*

Im Nautischen Dreieck gelten für *PZ* als Grundseite die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
\cos\varphi \sin t &= \sin z \sin p,\\
\cos\varphi \cos t &= \cos z \cos\delta - \sin z \sin\delta \cos p,\\
\sin\varphi &= \cos z \sin\delta + \sin z \cos\delta \cos p,\\
\cos\varphi \sin A &= \cos\delta \sin p,\\
\cos\varphi \cos A &= -\sin\delta \sin z + \cos\delta \cos z \cos p\,.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 35)}$$

Für $p = \pm\frac{\pi}{2}$ ergibt sich hieraus, wenn wir mit A_3, z_3, t_3 Azimut, Zenitdistanz und Stundenwinkel der größten Digression bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned}
\cos\varphi \sin t_3 &= \pm \sin z_3\,,\\
\cos\varphi \cos t_3 &= \cos z_3 \cos\delta\,,\\
\sin\varphi &= \cos z_3 \sin\delta\,,\\
\cos\varphi \sin A_3 &= \pm \cos\delta\,,\\
\cos\varphi \cos A_3 &= -\sin z_3 \sin\delta\,.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 36)}$$

Aus den drei mittleren dieser Gleichungen erhält man unmittelbar

$$\sin A_3 = \pm \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}, \quad \cos z_3 = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}, \quad \cos t_3 = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\delta \qquad (II;\ 37)$$

und hieraus, in der gleichen Weise wie (II; 4) aus (II; 2),

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{A_3}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\delta-\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta+\varphi}{2}, \\ &\operatorname{tg} A_3 = \pm \frac{\cos\delta}{\sqrt{\sin(\delta-\varphi)\sin(\delta+\varphi)}}, \\ &\operatorname{tg}^2\frac{z_3}{2} = \operatorname{tg}\frac{\delta-\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta+\varphi}{2}, \\ &\operatorname{tg} z_3 = \frac{\sqrt{\sin(\delta-\varphi)\sin(\delta+\varphi)}}{\sin\varphi}, \\ &\operatorname{tg}^2\frac{t_3}{2} = \frac{\sin(\delta-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)}, \\ &\operatorname{tg} t_3 = \pm \frac{\sqrt{\sin(\delta-\varphi)\sin(\delta+\varphi)}}{\sin\varphi\cos\delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (II;\ 38)$$

Aus (II; 37) folgt, daß A_3, z_3, t_3 nur dann reell sind, wenn

$$\cos\delta \leqq \cos\varphi, \quad |\sin\varphi| \leqq |\sin\delta|, \quad |\operatorname{tg}\varphi| \leqq |\operatorname{tg}\delta|.$$

Diese drei Bedingungen sind gleichzeitig erfüllt, und zwar dann und nur dann, wenn

$$|\delta| \geqq |\varphi|. \qquad (II;\ 39)$$

In größte Digression gelangen also nur die Sterne innerhalb der beiden Polkalotten, deren Grenzkreise den Ersten Vertikal im Zenit bzw. Nadir berühren. Im Äquator umfassen diese Bereiche alle Sterne, an den Polen keine. Vergleicht man (II; 39) mit (II; 22), so findet man, daß größte Digression und Durchgang durch den Ersten Vertikal einander ausschließen.

In der größten Digression ist nach (II; 33) und wegen $\frac{dA_3}{dt} = 0$

$$\frac{d^2A_3}{dt^2} = -\frac{\cos\varphi\cos A_3}{\sin^2 z_3}\frac{dz_3}{dt}.$$

Hierin ist nach (II; 28) wegen $\sin p = \pm 1$

$$\frac{dz_3}{dt} = \pm \cos\delta$$

und nach der letzten Gleichung (II; 36) $\cos\varphi\cos A_3 = -\sin z_3 \sin\delta$ zu setzen. Demnach hat

$$\frac{d^2A_3}{dt^2} = \pm \frac{\sin\delta\cos\delta}{\sin z_3} \qquad (II;\ 40)$$

in der westlichen größten Digression das gleiche, in der östlichen das entgegengesetzte Vorzeichen wie δ. Nach der zweiten Gleichung (II; 37) findet die größte Digression über dem Horizont statt, wenn δ und φ das gleiche Vorzeichen haben. Beschränken wir uns also auf die sichtbaren Digressionen, so lehrt (II; 40), daß auf der Nordhalbkugel der Erde das Azimut in der westlichen größten Digression ein Minimum, in der östlichen ein Maximum hat. Auf der südlichen Halbkugel ist es umgekehrt.

Die Funktionen $z(t)$ und $A(t)$ haben *Wendepunkte*, wenn ihre zweiten Ableitungen verschwinden. An diesen Punkten kann ihre zeitliche Änderung für ein mehr oder weniger ausgedehntes Zeitintervall angenähert als linear angesehen werden.

Nach (II; 32) verschwindet die zweite Ableitung der Zenitdistanz, wenn entweder $\cos A$ oder $\frac{dA}{dt}$ gleich null ist. Die Funktion $z(t)$ hat also Wendepunkte im Ersten Vertikal oder in der größten Digression. Jeder Stern durchläuft somit Wendepunkte der Zenitdistanz, da entweder die eine oder die andere dieser Bedingungen im Laufe seiner täglichen Bewegung eintreten muß.

Wendepunkte des Azimuts treten nach (II; 34) auf:

1. wenn $\frac{dz}{dt} = 0$ ist, also beim Meridiandurchgang,
2. wenn die Zenitdistanz des Sterns gleich der Lösung der Gleichung $1 - 2\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}\cos z + \cos^2 z = 0$ ist.

Durch eingehende Diskussion dieser Gleichung gelangt man zu interessanten Einsichten über die Verteilung dieser Azimutwendepunkte[1]), über die wir aber hier nicht zu berichten brauchen, weil sie für das Problem der Geographischen Ortsbestimmung keine Bedeutung haben.

Zur Übersicht stellen wir nachfolgend die Werte zusammen, die $\frac{dz}{dt}$ und $\frac{dA}{dt}$ an bevorzugten Stellen der Sphäre annehmen:

Ort	$\frac{dz}{dt}$	$\frac{dA}{dt}$
Horizont	$\pm \sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta}$	$\sin\varphi$
Meridian	0	$\pm \cos\delta \operatorname{cosec} z_1$
Erster Vertikal.	$\pm \cos\varphi$	$\sin\varphi$
Größte Digression	$\pm \cos\delta$	0

Bemerkenswert ist, daß die Geschwindigkeit der Azimutänderung eines Gestirns im Horizont und im Ersten Vertikal den gleichen Wert hat, ferner, daß die Geschwindigkeiten der Änderungen des Azimuts und der Zenitdistanz im Ersten Vertikal nur von der Polhöhe abhängen, also an einem und demselben Beobachtungsort für alle Sterne gleich sind.

[1]) Siehe K. Stumpff: Über die Wendepunkte des Azimuts der Fixsterne. Astron. Nachr. 277 (1949).

17. Die scheinbare Bewegung der Sonne

Die Überlegungen des vorigen Abschnitts setzten voraus, daß die Koordinaten α, δ der Gestirne konstant seien. Für die beweglichen Himmelskörper, von denen hier besonders Sonne und Mond interessieren, gelten sie deshalb nicht.

Vor allem müssen wir uns hier mit der scheinbaren Bewegung der *Sonne* befassen, nicht nur, weil die Beobachtung der Sonne (insbesondere auf See die der Sonnenhöhen) sehr häufig zur Bestimmung der Ortszeit und der Polhöhe angewandt wird, sondern namentlich, weil ja der tägliche Lauf der Sonne die Grundlage für die bürgerliche Zeiteinteilung bildet.

Ist $t_\odot$ der Stundenwinkel, $\alpha_\odot$ die Rektaszension der Sonne und Θ die Sternzeit, so ist nach (I; 50)

$$t_\odot = \Theta - \alpha_\odot . \qquad \text{(II; 41)}$$

Wir bezeichnen

$$w = t_\odot + 12^\text{h} \qquad \text{(II; 42)}$$

als die *wahre Sonnenzeit*. Es ist demnach 0^h wahre Sonnenzeit, wenn die Sonne in unterer Kulmination, 12^h, wenn sie in oberer Kulmination durch den Meridian des Beobachtungsorts geht.

Differenziert man (II; 41):

$$dt_\odot = d\Theta - d\alpha_\odot,$$

so erkennt man, daß die wahre Sonnenzeit langsamer abläuft als die Sternzeit, da ja die Rektaszension der Sonne beständig zunimmt, $d\alpha_\odot$ also immer positiv ist. Da ferner die Änderung $d\alpha_\odot$ nicht konstant, sondern periodischen Schwankungen unterworfen ist, so folgt auch, daß die wahre Sonnenzeit kein gleichförmiges Zeitmaß darstellt. Für das bürgerliche Leben brauchen wir aber eine Zeit, die zwar der täglichen Bewegung der Sonne und damit dem Rhythmus von Tag und Nacht angepaßt ist, aber vollkommen gleichförmig verläuft. Es ist daher zweckmäßig, $d\Theta$ und $d\alpha_\odot$ in konstante und periodisch veränderliche Teile zu zerlegen, also etwa

$$d\Theta = d\Theta_0 + d\Theta_p, \quad d\alpha_\odot = d\alpha_0 + d\alpha_p$$

und

$$\left.\begin{aligned} t_\odot &= (\Theta_0 - \alpha_0) + (\Theta_p - \alpha_p) = m + \mu - 12^\text{h} \\ m &= \Theta_0 - \alpha_0 + 12^\text{h} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 43)}$$

zu setzen, wobei m eine streng linear mit der Zeit wachsende Größe, die *mittlere Sonnenzeit*, darstellt[1]) und wobei

$$\mu = \Theta_p - \alpha_p, \qquad \text{(II; 44)}$$

die sogenannte *Zeitgleichung*, die periodischen Anteile der Sternzeit und der Sonnenrektaszension enthält, von denen aber nur die letzteren von Bedeutung

[1]) Bis Ende 1924 war es in der Astronomie üblich, den Beginn des wahren und mittleren Sonnentages auf den Mittag festzusetzen. Für Zeitangaben vor dem 1. Jan. 1925 ist also in (II; 42) und (II; 43) die additive Konstante $\pm$ 12^h fortzulassen.

sind. Für die Zeitgleichung, die in den Sonnenephemeriden der astronomischen Jahrbücher für jeden Tag 0^h mittlerer Greenwicher Zeit aufgeführt wird, gilt nach (II; 42), (II; 43) die Beziehung

$$\mu = w - m^{1)} \qquad \text{(II; 45)}$$

(Zeitgleichung = wahre minus mittlere Zeit).

Die Form des jährlichen Verlaufs der Zeitgleichung wird durch die Art der scheinbaren Bewegung der Sonne längs der Ekliptik bestimmt. Abb. 20 zeigt Äquator, Ekliptik und Frühlingspunkt (X) zu dem Zeitpunkt, an dem die Sonne den scheinbaren Ort S erreicht hat. Zwischen der *wahren Länge* λ der Sonne (d. h. ihrem Abstand SX vom Frühlingspunkt), ihrer Rektaszension $\alpha_\odot$ und der Schiefe der Ekliptik ε besteht im rechtwinkligen sphärischen Dreieck SXQ die Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha_\odot = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \lambda,$$

die nach Anhang B II auf die Reihenentwicklung

$$\alpha_\odot = \lambda - \operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\lambda + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4\lambda - \cdots \qquad \text{(II; 46)}$$

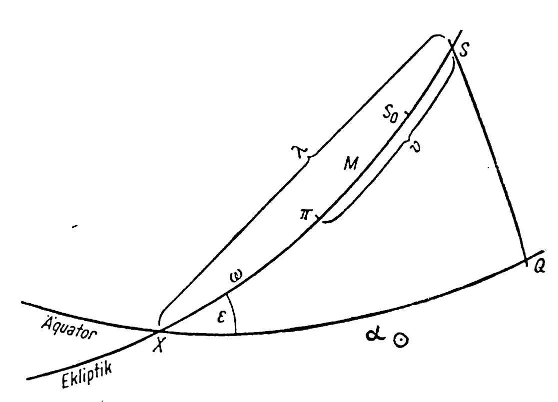


Abb. 20: Scheinbare Bahn der Sonne

führt. Es seien nun Π der Ort des *Perigäums* (Erdnähe) der Sonne, ω die *Länge des Perigäums*, v die *wahre Anomalie* der Sonne in ihrer scheinbaren elliptischen Bewegung um die Erde (Abstand der Sonne vom Perigäum). Dann ist

$$\lambda = \omega + v. \qquad \text{(II; 47)}$$

Wir betrachten nun neben S einen Hilfspunkt S_0 (mittlere Sonne), der sich gleichförmig auf der Ekliptik bewegt und mit der wahren Sonne nach jedem Umlauf im Perigäum Π zusammentrifft. Der Abstand der mittleren Sonne vom Perigäum ist die *mittlere Anomalie M*. Es gilt dann nach den Gesetzen der Himmelsmechanik angenähert (d. h. ohne Berücksichtigung der Störungen durch die Planeten und den Mond)

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \cdots, \qquad \text{(II; 48)}$$

wenn e die Exzentrizität der Sonnenbahn (Erdbahnellipse) bedeutet. Die mittlere Anomalie M ist ein gleichförmig mit der Zeit wachsender Winkel,

[1]) Vor dem 1. 1. 1931 pflegte man $\mu = m - w$ zu setzen.

der in einem anomalistischen Jahr (d. h. von einem Perigäum der Sonne bis zum nächsten) um 2π zunimmt. Bezeichnen wir mit

$$l = \omega + M$$

die *mittlere Länge* (XS_0) der Sonne, einen Winkel, der in einem tropischen Jahr, d. h. der Zeit zwischen zwei Durchgängen der mittleren Sonne durch den Frühlingspunkt, gleichmäßig um 2π zunimmt, so ist nach (II; 47), (II; 48)

$$\lambda = l + 2e\sin(l-\omega) + \frac{5}{4}e^2\sin 2(l-\omega) + \cdots. \qquad \text{(II; 49)}$$

Setzt man dies in (II; 46) ein, so ergibt sich eine Entwicklung von der Form

$$\alpha_{\odot} = l + c_1\sin(l-\gamma_1) + c_2\sin(2l-\gamma_2) + \cdots,$$

in der die Konstanten c_i, γ_i Funktionen von e, ω, ε sind. Die Zeitgleichung μ wird also gemäß (II; 44) im wesentlichen durch den negativ genommenen periodischen Anteil dieses Ausdrucks gewonnen. Benutzen wir die für 1950,0 gültigen Werte

$$e = 0{,}01673 \qquad \omega = 282^\circ\ 4{,}'9 \qquad \varepsilon = 23^\circ\ 26{,}'8,$$

so erhalten wir für die Zeitgleichung den genäherten Ausdruck

$$\mu = 442{,}^s1\sin(l - 103^\circ\ 8{,}'0) + 595{,}^s9\sin(2l - 0^\circ\ 11{,}'4) + \cdots.$$

Der Hauptsache nach wird also der Verlauf der Zeitgleichung durch zwei Sinuswellen von jährlicher und halbjährlicher Periode bestimmt. Die erstere ist eine Folge der Exzentrizität der Erdbahn, die zweite, deren Amplitude die größere ist, rührt zum überwiegenden Teil von der Neigung der Ekliptik gegen den Himmelsäquator her.

Die Zeitgleichung, deren Jahresverlauf Abb. 21 zeigt, hat jährlich vier Nullstellen und je zwei Maxima und Minima. Die Eintrittsdaten der Nullstellen und Extremwerte, die in verschiedenen Jahren nur geringfügig schwanken, sowie die Extremwerte selbst sind nachfolgend zusammengestellt:

Nullstellen	Extrema
16. April	Minimum — 14,4 Min. am 12. Febr.
14. Juni	Maximum + 3,8 Min. am 14. Mai
1. September	Minimum — 6,4 Min. am 26. Juli
25. Dezember	Maximum + 16,4 Min. am 3. Nov.

18. Sternzeit und Sonnenzeit

Durch die gleichförmige scheinbare Drehung der Fixsternsphäre ist uns als natürliches Zeitmaß die *Sternzeit* gegeben, während das nach dem Wechsel zwischen Tag und Nacht ausgerichtete bürgerliche Leben uns zur Einführung

der mittleren Sonnenzeit — kürzer auch *mittlere Zeit* genannt — veranlaßt. Das Nebeneinanderbestehen dieser verschiedenen Zeitrechnungen ist lästig, aber für den Astronomen unvermeidlich. Es ist daher notwendig, die Rechenvorschriften zu ermitteln, die dem Übergang von der einen Zeitangabe zur anderen dienen.

Ebenso wie die Sternzeit Θ ist auch die mittlere Zeit m zunächst als *Ortszeit* definiert, d. h., sie gilt für den Beobachtungsort und gleichzeitig für

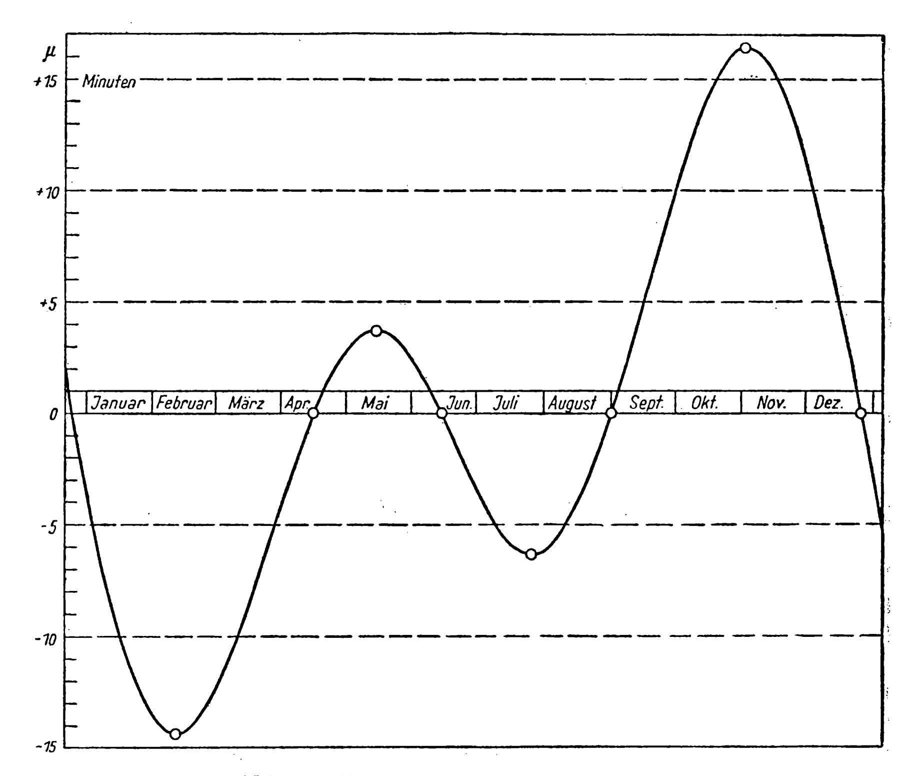


Abb. 21: Jahresverlauf der Zeitgleichung

alle Orte derselben geographischen Länge. Der Beginn des *Sterntages* ($\Theta = 0^h$) ist auf den Zeitpunkt festgesetzt worden, an dem der Frühlingspunkt in oberer Kulmination durch den Meridian des Beobachtungsortes geht. Der Beginn des *mittleren Tages* ($m = 0^h$) findet gemäß (II; 45) statt, wenn $w = \mu$ oder, mit Rücksicht auf (II; 42), wenn der Stundenwinkel der wahren Sonne gleich der um 12^h vermehrten oder verminderten Zeitgleichung ist.

Für einen Beobachtungsort mit der geographischen Länge λ sei ϑ die Sternzeit am Beginn des Beobachtungstages (mittlere Mitternacht oder 0^h mittlere Ortszeit), Θ die im Augenblick T der Beobachtung. Dann ist also

von der mittleren Mitternacht bis T die Sternzeit $\Theta - \vartheta$ verflossen. Nach (I; 49) ist

$$1^{\mathrm{h}}\ \text{Sternzeit} \quad = \left(\frac{365{,}2422}{366{,}2422}\right)^{\mathrm{h}} = (1-q)^{\mathrm{h}}\ \text{mittlere Zeit,}$$

$$1^{\mathrm{h}}\ \text{mittl. Zeit} = \left(\frac{366{,}2422}{365{,}2422}\right)^{\mathrm{h}} = \frac{1^{\mathrm{h}}}{1-q}\ \text{Sternzeit,}$$

$$q = \frac{1}{366{,}2422}.$$

Sei nun im Zeitpunkt T die mittlere Ortszeit m, so folgt

$$\left.\begin{aligned} m &= (\Theta - \vartheta)(1-q), \\ \Theta - \vartheta &= \frac{m}{1-q} = m\left(1 + \frac{q}{1-q}\right), \\ q &= 0{,}00273043, \quad \frac{q}{1-q} = 0{,}00273791. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 50)}$$

Seien ferner Θ_h, ϑ_h, m_h die in Stunden ausgedrückten Beträge der Zeiten, so kann man offenbar setzen

$$\Theta q = \Theta_h \cdot (3600\,q)^s = \Theta_h \cdot 9^s{,}829548 = \Theta_h (10-\beta)^s,$$

$$m\frac{q}{1-q} = m_h \cdot \left(3600\frac{q}{1-q}\right)^s = m_h \cdot 9^s{,}856476 = m_h (10-\gamma)^s$$

und erhält dann statt (II; 50)

$$\left.\begin{aligned} m &= \Theta - \vartheta - (\Theta - \vartheta)_h (10-\beta)^s, \\ \Theta &= \vartheta + m + m_h (10-\gamma)^s, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II; 51)}$$

$$\text{mit } \beta = 0{,}170452, \quad \gamma = 0{,}143524.$$

Die Formeln (II; 51) werden für die Rechnung sehr bequem, wenn man statt β, γ die Näherungswerte[1])

$$\beta \sim \frac{1}{6} = 0{,}166667, \qquad \gamma \sim \frac{1}{7} = 0{,}142857 \qquad \text{(II; 52)}$$

benutzt. Die Fehler, die man damit begeht, sind sehr klein, denn wählt man für ϑ diejenige mittlere Mitternacht, die der Beobachtungszeit T am nächsten liegt, so sind in (II; 51) die Beträge der Faktoren $(\Theta - \vartheta)_h$ bzw. m_h im un-

[1]) Genauer: $\beta = \frac{1}{6} + \frac{1}{270} + \cdots, \quad \gamma = \frac{1}{7} + \frac{1}{1500} + \cdots.$

günstigsten Falle ~ 12. Für die Beträge der Fehler der mit den Näherungswerten (II; 52) berechneten Zeiten gelten also die Ungleichungen

$$dm < 12\left(\beta - \frac{1}{6}\right)^s = 0{,}^s045\,,$$

$$d\Theta < 12\left(\gamma - \frac{1}{7}\right)^s = 0{,}^s008\,.$$

Ausgenommen bei exakten Zeitbestimmungen mit Meridianinstrumenten, bei denen das Hundertstel der Zeitsekunde berücksichtigt werden will, darf man also immer die bequemen Näherungen benutzen, wenn man es nicht vorzieht, die Umwandlung der Zeiten streng mit Hilfe der Tafeln auszuführen, die in jedem astronomischen oder nautischen Jahrbuch zu finden sind (siehe auch Anhang F II).

Die Formeln (II; 51) bedürfen noch einer Ergänzung, da die Jahrbücher die Sternzeit ϑ nur für die mittlere Mitternacht des Meridians von Greenwich geben. Die mittlere Zeit $\overline{m}$ des Nullmeridians wird als *Weltzeit* (WZ) bezeichnet.[1]) Zwischen ihr und der gleichzeitigen Ortszeit m des Beobachtungsorts auf der geographischen Länge λ besteht die Beziehung

$$\overline{m} = m + \lambda\,, \qquad \text{(II; 53)}$$

die der Gleichung (I; 51) für die Sternzeiten entspricht. Ist also für Greenwich bzw. für den Beobachtungsort nach (II; 51)

$$\overline{\Theta} = \overline{\vartheta} + \overline{m} + \overline{m}_h\,(10 - \gamma)^s,$$
$$\Theta = \vartheta + m + m_h\,(10 - \gamma)^s,$$

so ergibt wegen (I; 51) und (II; 53) die Differenz dieser beiden Gleichungen

$$\lambda = \overline{\vartheta} - \vartheta + \lambda + \lambda_h\,(10 - \gamma)^s$$

oder

$$\vartheta = \overline{\vartheta} + \lambda_h\,(10 - \gamma)^s\,.$$

Als konventionelle bürgerliche Zeit gilt in Westeuropa die Greenwicher Ortszeit (Weltzeit), in Mitteleuropa dagegen die *Mitteleuropäische Zeit* (MEZ), die der Ortszeit des 15. Längengrades östlich Greenwich ($\lambda = -1^h$) entspricht. Es ist also

$$\text{MEZ} = \overline{m} + 1^h = m + \lambda + 1^h\,.$$

Allgemein ist die auf die Ortszeit der Länge λ_0 bezogene *Zonenzeit*

$$m_{\lambda_0} = \overline{m} - \lambda_0 = m + \lambda - \lambda_0\,.$$

Nachstehend seien die zur Umrechnung von mittlerer Zeit in Sternzeit und umgekehrt notwendigen Formeln noch einmal übersichtlich zusammengestellt, wobei die Näherungen (II; 52) verwendet wurden:

---

[1]) Englisch: U. T. = Universal Time.

A. *Umrechnung von mittlerer Zeit in Sternzeit*

Gegeben: λ, $\overline{m}$ oder MEZ, $\overline{\vartheta}$

$$m = \overline{m} - \lambda = \text{MEZ} - (\lambda + 1^{\text{h}})$$
$$\vartheta = \overline{\vartheta} + \lambda_h \left(10 - \frac{1}{7}\right)^{s}$$
$$\Theta = \vartheta + m + m_h \left(10 - \frac{1}{7}\right)^{s}$$

B. *Umrechnung von Sternzeit in mittlere Zeit*

Gegeben: λ, Θ, $\overline{\vartheta}$

$$\vartheta = \overline{\vartheta} + \lambda_h \left(10 - \frac{1}{7}\right)^{s}$$
$$m = \Theta - \vartheta - (\Theta - \vartheta)_h \left(10 - \frac{1}{6}\right)^{s}$$
$$\overline{m} = m + \lambda$$
$$\text{MEZ} = \overline{m} + 1^{\text{h}}$$

19. Die Mittagsverbesserung

Für die beweglichen Gestirne sind wegen der Veränderlichkeit von α, δ die in Abschnitt 16 abgeleiteten Regeln der täglichen Bewegung nur angenähert gültig. Uns interessieren hier besonders die Extrema der Zenitdistanz, die für die Fixsterne beim Meridiandurchgang, für Sonne und Mond aber im allgemeinen außerhalb des Meridians stattfinden.

Differenzieren wir die erste der Gleichungen (II; 23), indem wir neben z, t auch δ als veränderlich ansehen, so folgt

$$-\sin z\, dz = (\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t)\, d\delta - \cos\delta\cos\varphi\sin t\, dt.$$

Für den Stundenwinkel t, bei dem das Gestirn seinen höchsten bzw. tiefsten Stand erreicht, gilt also die Beziehung ($dz = 0$)

$$\sin t = (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta\cos t)\frac{d\delta}{dt}, \qquad \text{(II; 54)}$$

die man streng nach dem in Anhang C beschriebenen Verfahren lösen könnte. In der Praxis der geographischen Ortsbestimmung wird diese Formel ausschließlich auf die Sonne angewandt — der Stundenwinkel t bedeutet in diesem Falle den Zeitunterschied zwischen dem Höchststand der Sonne und dem wahren Mittag und wird daher als *Mittagsverbesserung* bezeichnet. Ebenso spricht man von *Mitternachtsverbesserung*, wenn es sich um die untere Kulmination der Sonne und ihren tiefsten Stand handelt, doch hat dieser Fall nur in hohen Breiten praktische Bedeutung (Mitternachtssonne).

Für die Sonne ist die tägliche Änderung der Deklination $|\Delta\delta| < 24'$, es ist also, wenn wir t im Bogenmaß ausdrücken,

$$\left|\frac{d\delta}{dt}\right| \sim \frac{|\Delta\delta|}{2\pi} < 4'.$$

In (II; 54) ist also $\sin t$ im allgemeinen eine kleine Größe. Außer in sehr hohen Breiten, wo $\operatorname{tg} \varphi$ groß ist[1]), kann man daher stets $\sin t = t$, $\cos t = 1$ für den höchsten, $\sin t = \pi - t$, $\cos t = -1$ für den tiefsten Stand der Sonne setzen und erhält so die einfacheren Formeln

$$\left.\begin{aligned} t &= (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta)\frac{d\delta}{dt}, \\ 12^h - t &= (\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\delta)\frac{d\delta}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (II;\ 55)$$

für die Mittags- bzw. Mitternachtsverbesserung.

Den numerischen Wert der Differentialquotienten kann man aus den Ephemeriden der scheinbaren Sonnenkoordinaten α, δ ableiten, in denen diese Größen nebst ihren ersten Differenzen für jeden Tag des Jahres 0^h WZ verzeichnet sind. Diese Differenzen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, die den Zuwachs von α, δ in 24 Stunden darstellen, ordnen wir den Zeitpunkten 12^h WZ zu, also dem mittleren Mittag des Nullmeridians. Es genügt, wenn man aus dieser Tafel $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ für den Zeitpunkt der Kulmination der wahren Sonne am Beobachtungsort linear interpoliert, also für

$$\overline{m} = 12^h - \mu + \lambda \qquad \text{(Weltzeit)},$$

wobei μ gleichzeitig der Ephemeride zu entnehmen ist. Die diesem Zeitpunkt entsprechenden Differentialquotienten der Koordinaten nach der mittleren Zeit m sind

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}, \quad \frac{d\delta}{dm} = \frac{\Delta\delta}{2\pi},$$

da die Differenzen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ einer Änderung der mittleren Zeit um 24^h, also des Bogens m um 2π entsprechen, und da bei der geringen Krümmung der Kurven $\alpha(m)$, $\delta(m)$ der Differenzenquotient für den Differentialquotienten gesetzt werden darf. Gemäß (II; 41) und (II; 50) ist nun

$$dt = d\Theta - d\alpha, \qquad d\Theta = \frac{dm}{1-q},$$

also

$$dt = dm\left(\frac{1}{1-q} - \frac{d\alpha}{dm}\right)$$

und somit

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{(1-q)\frac{d\delta}{dm}}{1-(1-q)\frac{d\alpha}{dm}} = \frac{\varkappa}{1-\nu}. \qquad (II;\ 56)$$

[1]) Erst für $|\varphi| > 87{,}^\circ 5$ kann der Fehler in t bei Verwendung der einfacheren Formeln (II; 55) $\pm\, 0{,}''1$ überschreiten.

Setzt man dies in (II; 55) ein, so erhält man für die Mittagsverbesserung

$$\left.\begin{aligned} t &= (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta)\frac{\varkappa}{1-\nu} \\ \text{mit} \qquad \varkappa &= \frac{1-q}{2\pi}\Delta\delta, \quad \nu = \frac{1-q}{2\pi}\Delta\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (II;\ 57)$$

Hierbei sind t, $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ zunächst in Bogenmaß verstanden. Will man t in Zeitsekunden erhalten und ist $\Delta\delta$ in Bogensekunden, $\Delta\alpha$ in Zeitsekunden ausgedrückt, so hat man zu setzen

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{1-q}{2\pi}\cdot\frac{\Delta\delta}{15} = [8{,}02454]\,\Delta\delta, \\ \nu &= \frac{1-q}{2\pi}\cdot\Delta\alpha\cdot 15\sin 1'' = [5{,}0623]\,\Delta\alpha. \end{aligned} \qquad (II;\ 58)$$

Man kann aber die Formeln (II; 57), (II; 58), ohne einen ins Gewicht fallenden Fehler zu begehen, bedeutend vereinfachen, indem man $\Delta\alpha$, das zwischen den Grenzen 215^s und 267^s schwanken kann, und das ja auf das Ergebnis nur Einflüsse zweiter Ordnung hat, durch einen konstanten Mittelwert ersetzt. Es ist leicht einzusehen, daß man dieser Vereinfachung durch die Annahme $dt = dm$ entspricht. Setzt man dies in (II; 55) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} t &= (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta)\frac{d\delta}{dm}, \\ t^s &= (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta)\frac{\Delta\delta}{30\pi} = (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta)\cdot[8{,}02573]\,\Delta\delta \end{aligned} \qquad (II;\ 59)$$

als Näherungsformel, deren Fehler höchstens 0,03% betragen und durchweg vernachlässigt werden kann.

III. KAPITEL

BESTIMMUNG DER ORTSZEIT BEI BEKANNTER GEOGRAPHISCHER BREITE

20. Bestimmung der Ortszeit aus einer Zenitdistanz

Hat man die Zenitdistanz oder die Höhe eines Gestirns beobachtet, sie von den Einflüssen der Refraktion und, soweit nötig, der täglichen Parallaxe, des scheinbaren Halbmessers und der Kimmtiefe befreit, und hat man ferner die Beobachtungszeit u an der Arbeitsuhr abgelesen, so ist es bei bekannter Polhöhe φ im allgemeinen möglich, den Stundenwinkel t des Gestirns im Zeitpunkt der Beobachtung zu berechnen. Dieser liefert aber die Sternzeit und damit die Korrektion Δu, um die die Angaben der Uhr zu verbessern sind. Man bezeichnet Δu als den *Uhrstand* oder die *Uhrkorrektion.*

Aus der ersten Gleichung (II; 23) folgt

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} \tag{III; 1}$$

oder

$$\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \cos z}{\cos(\varphi + \delta) + \cos z} = \frac{\sin\frac{z + \varphi - \delta}{2} \sin\frac{z - \varphi + \delta}{2}}{\cos\frac{\varphi + \delta + z}{2} \cos\frac{\varphi + \delta - z}{2}}.$$

Setzt man wie in (II; 11) $\frac{\varphi + \delta + z}{2} = \sigma$, so ergibt sich daraus die schon früher (II; 12) angegebene Formel

$$\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = \frac{\sin(\sigma - \delta) \sin(\sigma - \varphi)}{\cos\sigma \cos(\sigma - z)}, \tag{III; 2}$$

die für logarithmische Rechnung geeignet ist und den Stundenwinkel so genau liefert, wie es die Beobachtungsumstände gestatten. Aus ihm folgt die Sternzeit der Beobachtung $\Theta = t + \alpha$, also, wenn die Arbeitsuhr Sternzeit anzeigt,

$$\Delta u = \Theta - u = t + \alpha - u. \tag{III; 3}$$

Geht die Uhr nach mittlerer Zeit (z. B. WZ oder MEZ), so ist in (III; 3) Θ nach den Formeln des Abschnitts 18 umzuwandeln.

Fehler in der Beobachtung der Zenitdistanz erzeugen Fehler in der aus ihr abgeleiteten Uhrkorrektion. Angenommen, daß Polhöhe und Gestirnsort fehlerfrei bekannt sind, ergibt die Differentiation der Gleichung (III; 1)

$$\cos\varphi\cos\delta\sin t\,dt = \sin z\,dz$$

oder, wenn man die linke Seite gemäß der dritten Gleichung (II; 23) umwandelt und $\sin z$ herausdividiert,

$$\sin A\cos\varphi\,dt = dz. \qquad \text{(III; 4)}$$

Die abgelesene Uhrzeit u darf als fehlerlos angesehen werden — man kann einen Ablesefehler du (natürlich bleiben *grobe* Fehler hier und bei allen folgenden Überlegungen dieser Art außer acht) immer auf den Fehler dz der gemessenen Zenitdistanz werfen. Die Beobachtung erfolgt ja stets so, daß der Meßfaden des Instruments auf den Stern (bzw. auf den Rand von Sonne oder Mond) eingestellt wird. Der Fehler dz entsteht dadurch, daß im Augenblick der vermeintlichen Koinzidenz der Stern noch eine (sehr kleine) Entfernung vom Faden hat. Ist zudem die abgelesene Uhrzeit u von der Uhrzeit der Einstellung des Fadens auf den Stern um du verschieden, so ist es zweckmäßig, diesen Fehler mit dz zu vereinigen, indem man nunmehr unter dz den Abstand des Sterns vom horizontalen Meßfaden zur Uhrzeit u versteht.

Unter diesen Voraussetzungen folgt aus (III; 3) und (III; 4)

$$d\Delta u = dt = \frac{dz}{\sin A\cos\varphi}\,. \qquad \text{(III; 5)}$$

Der Fehler der beobachteten Zenitdistanz geht also im allgemeinen vergrößert in das Beobachtungsergebnis ein. Die günstigsten Bedingungen für eine Zeitbestimmung sind erfüllt, wenn $|\sin A\cos\varphi|$ möglichst groß ist. Danach gelten folgende Regeln:

1. Zeitbestimmungen aus Zenitdistanzen sind am genauesten, wenn das Gestirn im Ersten Vertikal steht ($\sin A = \pm 1$). Sie sind unmöglich im Meridian und unsicher in der Nähe des Meridians.

2. Zeitbestimmungen aus Zenitdistanzen ergeben die größte Genauigkeit am Äquator. In hohen Breiten sind sie unsicher und an den Polen (wo die Zenitdistanzen der Fixsterne zeitlich konstant sind) ganz unmöglich.[1]

21. Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen

Gestirne, deren Deklination sich während ihrer scheinbaren täglichen Bewegung nicht merklich ändert, erreichen eine bestimmte Zenitdistanz z in zwei entgegengesetzt gleichen Stundenwinkeln ($t_1 = -\tau$, $t_2 = +\tau$). Ist in der Zwischenzeit auch die Rektaszension unveränderlich, so liegen die entsprechenden Sternzeiten $\Theta_1 = \alpha - \tau$, $\Theta_2 = \alpha + \tau$ symmetrisch zur

[1]) Um diesen Sachverhalt zu berücksichtigen, werden wir den Fehler der Zeitbestimmung immer in die Form $\cos\varphi\, d\,\Delta u$ kleiden, die auch für hohe Breiten differentiell ist.

Meridiandurchgangszeit $\Theta_0 = \alpha$. Hieraus ergibt sich eine sehr einfache Methode zur Bestimmung der Ortszeit: Man beobachte einen Fixstern (α, δ), wenn er östlich und westlich des Meridians durch die gleiche Zenitdistanz z geht. Sind u_1, u_2 die abgelesenen Uhrzeiten, Δu_1, Δu_2 die diesen Zeiten entsprechenden Uhrstände, so ist

$$\Theta_1 = u_1 + \Delta u_1, \quad \Theta_2 = u_2 + \Delta u_2; \quad \Theta_0 = \alpha = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{\Delta u_1 + \Delta u_2}{2}.$$

Nimmt man an, daß der Uhrstand sich in der Zeit zwischen den beiden Beobachtungen linear geändert habe, so wird

$$\Delta u_0 = \frac{\Delta u_1 + \Delta u_2}{2} = \alpha - \frac{u_1 + u_2}{2}$$

der Uhrstand während der Kulmination des Sternes sein.

Dieses Verfahren, das auch als Methode der *Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen* bekannt ist, hat außer seiner Einfachheit den Vorzug, daß weder die Deklination des Gestirns noch die Zenitdistanz z selbst bekannt zu sein brauchen, und daß somit Teilungs- und Indexfehler des Kreises am Instrument keinen Einfluß haben. Auch die geographische Breite des Beobachtungsorts braucht man bei dieser Methode nicht zu kennen. Erforderlich ist nur, daß die beiden „korrespondierenden" Zenitdistanzen einander genau gleich sind. Man erreicht das, indem man dafür sorgt, daß bei der zweiten Beobachtung die Neigung des Fernrohrs gegen die Lotlinie dieselbe ist wie bei der ersten, was am besten mit Hilfe einer am Fernrohr festklemmbaren Libelle geschieht, die bei der gewünschten Fernrohrneigung genau einspielt. Sind die Zenitdistanzen nicht genau gleich, so ergibt der Unterschied der beiden Libellenablesungen den Unterschied dz der beiden Zenitdistanzen, vorausgesetzt, daß sich an der Verbindung Fernrohr-Libelle in der Zwischenzeit (etwa durch Temperatureinflüsse oder mechanische Einwirkungen) nichts geändert hat. Sind also die beiden Zenitdistanzen z und $z + dz$, so hat man wegen (III; 5) für die zweite Sternzeit

$$\Theta_2 = \alpha + \tau + \frac{dz}{\sin A \cos \varphi}$$

zu setzen. Es ist also

$$\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2} = \alpha + \frac{dz}{2 \sin A \cos \varphi}$$

und daher

$$\Delta u_0 = \alpha - \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{dz}{2 \sin A \cos \varphi}.$$

Um den Einfluß einer Zenitdistanzänderung (bzw. des Fehlers ihrer Bestimmung) auf das Ergebnis möglichst herabzudrücken, ist es also auch hier zweckmäßig, die beiden Beobachtungen im Ersten Vertikal oder in seiner Nähe vorzunehmen, die eine östlich, die andere westlich des Zenits. Außerdem

ist es natürlich vorteilhaft, wenn die Zwischenzeit $u_2 - u_1$ möglichst klein ist, damit Unregelmäßigkeiten des Uhrgangs und Temperatureinflüsse auf das Instrument möglichst wenig Zeit haben, sich schädlich auszuwirken. Man wird also Gestirne bevorzugen, die den Ersten Vertikal in kleiner Zenitdistanz überschreiten. Das hat auch den Vorteil, daß die Refraktion klein ist und von den wechselnden meteorologischen Bedingungen nicht merklich beeinflußt wird.

Soll die Methode der korrespondierenden Höhen auf die *Sonne* angewandt werden, so muß wieder auf die Veränderung ihrer Koordinaten Rücksicht genommen werden. Das arithmetische Mittel der zu gleichen Zenitdistanzen z gehörigen Stundenwinkel ist nicht null und stimmt auch nicht etwa mit dem Stundenwinkel der größten Sonnenhöhe überein, den wir in Abschnitt 19 als *Mittagsverbesserung* bezeichneten.

Es seien $z_1 = z_2$ die korrespondierenden Zenitdistanzen der Sonne, u_1, u_2 die abgelesenen Uhrzeiten, t_1, t_2 die zugehörigen Stundenwinkel der Sonne (wahren Sonnenzeiten minus 12^h), deren arithmetisches Mittel

und die halbe Zwischenzeit

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{t_1 + t_2}{2} \\ \tau &= \frac{t_2 - t_1}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III; 6)}$$

Es seien ferner δ und $\frac{d\delta}{dt} = \frac{\varkappa}{1-\nu}$ [siehe (II; 56)] die zu t oder, genau genug, zum wahren Mittag gehörige Deklination der Sonne und ihre Änderung in der Zeiteinheit. Man kann dann für die zu den beiden Beobachtungszeiten gehörenden Deklinationen mit genügender Annäherung

$$\delta_1 = \delta - \tau \frac{d\delta}{dt}, \quad \delta_2 = \delta + \tau \frac{d\delta}{dt} \qquad \text{(III; 7)}$$

setzen. Aus $\cos z_1 = \cos z_2$ folgt nach der ersten Formel (II; 23)

$$\sin\varphi\,(\sin\delta_2 - \sin\delta_1) = \cos\varphi\,(\cos\delta_1\cos t_1 - \cos\delta_2\cos t_2)$$

oder, wenn man δ_1, δ_2 durch (III; 7) ausdrückt und nach (III; 6)

$$t_1 = t - \tau, \quad t_2 = t + \tau$$

setzt, auf Grund einer kurzen Rechnung

$$\sin\varphi\cos\delta\sin\left(\tau\frac{d\delta}{dt}\right) =$$

$$= \cos\varphi\left[\sin\delta\cos t\cos\tau\sin\left(\tau\frac{d\delta}{dt}\right) + \cos\delta\sin t\sin\tau\cos\left(\tau\frac{d\delta}{dt}\right)\right]$$

und hieraus

$$\sin t = \operatorname{tg}\left(\tau\frac{d\delta}{dt}\right)\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\tau} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\tau}\cos t\right].$$

Da nun $\tau \frac{d\delta}{dt}$ und demnach auch t immer klein ist (wenn man die nähere Umgebung der Pole ausschließt), darf man $\sin t = t$, $\cos t = 1$, $\operatorname{tg}\left(\tau \frac{d\delta}{dt}\right) = \tau \frac{d\delta}{dt}$ setzen und erhält somit

$$t = \tau \frac{d\delta}{dt}\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\tau} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\tau}\right], \qquad \text{(III; 8)}$$

eine Formel, die für $\tau \to 0$ natürlich in (II; 55) übergeht. Seien μ_i, w_i, m_i $(i = 1,2)$ Zeitgleichung, wahre und mittlere Sonnenzeit während der beiden Beobachtungen, so ist, wenn $m_i = u_i + \varDelta u_i$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{w_1 + w_2}{2} - 12^h = t &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{\varDelta u_1 + \varDelta u_2}{2} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \\ \tau &= \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{\varDelta u_2 - \varDelta u_1}{2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III; 9)}$$

Sind μ und $\frac{d\mu}{dt}$ Zeitgleichung und ihre zeitliche Änderung im wahren Mittag, so kann man in (III; 9) mit genügender Genauigkeit

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \mu, \qquad \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} = \tau \frac{d\mu}{dt}$$

setzen, während man die Differenz der beiden Uhrkorrektionen, die immer klein ist, wegen des sehr kleinen Faktors $\frac{d\delta}{dt}$, mit dem τ in (III; 8) multipliziert erscheint, unbedenklich vernachlässigen kann. Man erhält dann, wenn man wieder $\frac{\varDelta u_1 + \varDelta u_2}{2} = \varDelta u$ setzt, aus (III; 8), (III; 9)

$$\tau = \frac{\frac{u_2 - u_1}{2}}{1 - \frac{d\mu}{dt}}, \qquad \varDelta u = \tau \frac{d\delta}{dt}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\tau} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\tau}\right) - \frac{u_1 + u_2}{2} - \mu. \qquad \text{(III: 10)}$$

In einem Spezialfall dieses Verfahrens der Zeitbestimmung aus korrespondierenden Sonnenhöhen sind u_1 und u_2 die Zeiten des Auf- und Untergangs der Sonne. Es genügt dann, in den Ausdrücken $\sin\tau$ und $\operatorname{tg}\tau$ der Formel (III; 10) für τ den theoretischen Stundenwinkel des Sonnenuntergangs zu benutzen. Nach (II; 1) und (II; 6) ist dann

$$\sin\tau = \sec\delta \sin A_0, \quad \operatorname{tg}\tau = -\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{cosec}\delta \sin A_0,$$

wobei für δ die Sonnendeklination des wahren Mittags gesetzt werden darf. Man erhält dann

$$t = \tau \frac{d\delta}{dt} \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\delta \sin A_0} = \tau \frac{d\delta}{dt} \frac{\sin\varphi}{\cos\delta \sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta)}},$$

wenn man $\sin A_0 = \cos A_0 \operatorname{tg} A_0$ durch (II; 3), (II; 5) eliminiert.

22. Zeitbestimmung durch Beobachtung zweier Sterne in gleicher Zenitdistanz

Die im vorigen Abschnitt beschriebene Methode der Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen eines und desselben Sternes oder der Sonne hat den Nachteil, daß beide Beobachtungen durch eine längere, oft viele Stunden währende Zwischenzeit getrennt sind, in der sich die Beobachtungsbedingungen und die Beschaffenheit des Instruments in störender Weise ändern können. Eine Variante dieses Verfahrens, die von diesem Übelstand frei ist, besteht darin, daß man zwei *verschiedene* Sterne während ihres Durchgangs durch den gleichen Almukantarat beobachtet, wobei man immer in der Lage ist, die beiden Sterne und ihre gemeinsame Zenitdistanz so auszuwählen, daß die Beobachtungen kurz hintereinander stattfinden können.

Es seien nun (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) die Koordinaten der beiden Sterne, $z_1 = z_2 = z$ ihre gemeinsame Zenitdistanz, t_1, t_2 ihre Stundenwinkel, Θ_1, Θ_2 die Sternzeiten und u_1, u_2 die Uhrzeiten der beiden Beobachtungen. Die Uhrkorrektion $\Delta u = \Theta_1 - u_1 = \Theta_2 - u_2$ werde als konstant angesehen, da die Differenz der Beobachtungszeiten klein ist.

Wir setzen nun

$$u_1 - \alpha_1 = \tau_1, \quad u_2 - \alpha_2 = \tau_2$$

und daher

$$t_1 = \tau_1 + \Delta u, \quad t_2 = \tau_2 + \Delta u\,.$$

Es folgt dann aus der ersten Grundgleichung (II; 23)

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi\cos\delta_1 (\cos\tau_1 \cos\Delta u - \sin\tau_1 \sin\Delta u),\\ \cos z &= \sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi\cos\delta_2 (\cos\tau_2 \cos\Delta u - \sin\tau_2 \sin\Delta u; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III; 11)}$$

also, wenn man beide Gleichungen voneinander subtrahiert, durch $\sin\varphi$ dividiert und nach Funktionen von Δu ordnet:

$$\left.\begin{aligned} &a\cos\Delta u + b\sin\Delta u = c\\ &\text{mit}\\ &a = m\sin n = \operatorname{ctg}\varphi\,(\cos\delta_1\cos\tau_1 - \cos\delta_2\cos\tau_2),\\ &b = m\cos n = -\operatorname{ctg}\varphi\,(\cos\delta_1\sin\tau_1 - \cos\delta_2\sin\tau_2),\\ &\qquad c = \sin\delta_2 - \sin\delta_1\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III; 12)}$$

Die Unbekannte Δu kann also nach den Methoden gefunden werden, die in Anhang C beschrieben sind. Am bequemsten erhält man Δu aus der Gleichung

$$m\sin(\Delta u + n) = \sin\delta_2 - \sin\delta_1 = c.$$

Eine Umwandlung dieser Gleichung in eine Tangentenformel erübrigt sich, wenn δ_1 und δ_2 möglichst gleich gewählt werden, da dann c klein ist.

Eine Variante dieser Methode erlaubt mit Vorteil die Anwendung der algebraischen Lösung (Anhang C II).

Man setze

$$
\left.\begin{aligned}
t &= \frac{t_1+t_2}{2} = \frac{\tau_1+\tau_2}{2} + \Delta u, & \delta &= \frac{\delta_1+\delta_2}{2}, \\
\lambda &= \frac{t_2-t_1}{2} = \frac{\tau_2-\tau_1}{2}, & \varepsilon &= \frac{\delta_2-\delta_1}{2},
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III; 13)}
$$

bzw.

$$t_1 = t-\lambda, \quad t_2 = t+\lambda, \quad \delta_1 = \delta-\varepsilon, \quad \delta_2 = \delta+\varepsilon.$$

Man erhält dann statt (III; 12)

$$\operatorname{ctg}\varphi\,[\cos t \cos\lambda\,(\cos\delta_1 - \cos\delta_2) + \sin t \sin\lambda\,(\cos\delta_1 + \cos\delta_2)] = $$
$$= \sin\delta_2 - \sin\delta_1$$

oder

$$a\cos t + b\sin t = c \qquad \text{(III; 14)}$$

mit

$$
\left.\begin{aligned}
a &= \cos\lambda\,\frac{\cos\delta_1-\cos\delta_2}{\cos\delta_1+\cos\delta_2} = \cos\lambda\,\operatorname{tg}\delta\,\operatorname{tg}\varepsilon, \\
b &= \sin\lambda, \\
c &= \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\sin\delta_2-\sin\delta_1}{\cos\delta_1+\cos\delta_2} = \operatorname{tg}\varphi\,\operatorname{tg}\varepsilon.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III; 15)}
$$

Diese Koeffizienten lassen sich gut logarithmisch berechnen. Außerdem erkennt man, daß (vgl. Anhang C II)

$$\alpha = \frac{a+c}{b}, \qquad \beta = \frac{a-c}{b}$$

beide klein sind, falls die Deklinationen der beiden Sterne sich nur wenig unterscheiden. Die Konvergenz der Entwicklung [Anhang C III (23)]

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = -\frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{1}{4}\alpha\beta + \frac{1}{8}\alpha^2\beta^2 - \frac{5}{64}\alpha^3\beta^3 + \cdots\right) \qquad \text{(III; 16)}$$

ist also außerordentlich rasch.

Die Gleichungen von der Form (III; 12), (III; 14) haben im allgemeinen zwei Lösungen, von denen aber nur eine den Beobachtungstatsachen entspricht, während die andere, die in (III; 16) bereits ausgeschieden wurde, leicht als unrichtig erkannt wird (etwa dadurch, daß sie ein sehr großes Δu liefert, während man weiß, daß der Uhrfehler nur klein sein kann). Die geometrische Bedeutung der beiden Lösungen ist übrigens leicht einzusehen. Seien S_1, S_2 die Örter der beiden Sterne zu den dazugehörigen Beobachtungszeiten (Abb. 22), so geht die Mittelsenkrechte auf dem sie verbindenden größten Kreis offenbar durch das Zenit, da ja beide Örter die gleiche Zenitdistanz haben. Andererseits liegt das Zenit auf dem Kreise um den Himmelsnordpol P mit dem Halbmesser $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Es gibt also zwei mögliche Zenitlagen Z_1 und Z_2 und daher, da ja die Sternzeit als die Rektaszension des Zenits

definiert ist, zwei Zeitbestimmungen, die mit den Beobachtungsdaten vereinbar sind.

Abb. 22 lehrt ferner, daß die Zenitbestimmung am schärfsten ausfällt, wenn der Vertikal $Z_1 Z_2$ den Kreis $Z_1 Z_2$ rechtwinklig schneidet, d. h. durch P geht. Dieser Vertikal fällt dann mit dem Meridian zusammen, S_1 und S_2 liegen also zum Meridian symmetrisch, ihre Deklinationen sind gleich und ihre Azimute entgegengesetzt gleich. Da die Beobachtung der Zeitpunkte, in denen ein Stern eine Zenitdistanz z erreicht, am genauesten ist, wenn $\frac{dz}{dt}$ ein Maximum hat, also nach (II; 30) im Ersten Vertikal, so folgt schließlich, daß es am günstigsten ist, die Sterne östlich und westlich des Zenits bei ihrem Durchgang durch den Ersten Vertikal oder in dessen Nähe zu beobachten.

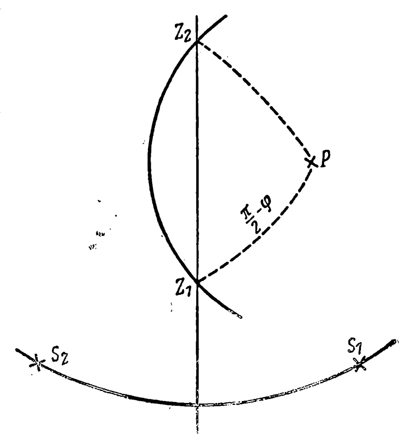


Abb. 22: Zeitbestimmung aus zwei gleichen Zenitdistanzen. Zwei Lösungen

Zu den gleichen Schlüssen gelangt man natürlich auch durch Diskussion der Differentialbeziehungen. Für konstantes φ, α, δ gelten die Formeln (II; 30)

$$\begin{aligned} dz_1 &= \cos\varphi \sin A_1\, dt_1 \\ &= \cos\varphi \sin A_1\, (du_1 + d\Delta u), \\ dz_2 &= \cos\varphi \sin A_2\, dt_2 \\ &= \cos\varphi \sin A_2\, (du_2 + d\Delta u). \end{aligned}$$

Nimmt man die abgelesenen Uhrzeiten als fehlerlos an, ($du_1 = du_2 = 0$), so wird der gesamte Beobachtungsfehler auf dz_1, dz_2 geworfen, also auf die tatsächlichen Abstände der Sterne vom Horizontalfaden des Fernrohrs zu den Zeiten u_1 und u_2. Da nun die Lage des durch den Horizontalfaden versinnbildlichten Almukantarats beliebig ist, also dz_1, dz_2 eine gemeinsame willkürliche Konstante enthalten, ist für die Beurteilung des Fehlers $d\Delta u$ nur die Differenz $dz_2 - dz_1$ maßgebend, aus der diese Konstante herausfällt. Man erhält also

$$\cos\varphi\, d\Delta u = \frac{dz_2 - dz_1}{\sin A_2 - \sin A_1}.$$

Das Beobachtungsergebnis ist somit am genauesten, wenn $\sin A_2 - \sin A_1$ ein Maximum hat, also für $A_2 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = -\frac{\pi}{2}$. Nach Anhang D IV (29, 30) ist, wenn ε den mittleren Fehler einer Zenitdistanzmessung bedeutet, in diesem günstigsten Falle ($|\sin A_2 - \sin A_1| = 2$) der mittlere Fehler der Zeitbestimmung $\varepsilon_{\Delta u} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sec\varphi$.

23. Die ZINGERsche Methode der Zeitbestimmung

Die allgemeinste Methode der Zeitbestimmung aus korrespondierenden Zenitdistanzen, bei der die Bedingung der Gleichheit der Zenitdistanzen nur angenähert erfüllt zu sein braucht, ist von N. ZINGER[1]) entwickelt worden und hat sich in der Praxis als eine der feinsten Methoden der Zeitbestimmung bewährt.

Als Instrument wird das „Zenitteleskop" verwendet, ein Fernrohr, das um eine vertikale und eine horizontale Achse drehbar ist und keine feingeteilten Kreise zu haben braucht. Wohl aber ist eine empfindliche Libelle erforderlich, die am Fernrohrkörper oder an der horizontalen Achse (rechtwinklig zu ihr) festklemmbar ist und durch die kleine Änderungen der Fernrohrneigung gegen die Lotrichtung meßbar angezeigt werden. Im Gesichtsfeld ist ein horizontaler Faden ausgespannt, den die Sterne im Moment der Beobachtung überschreiten, besser noch ist ein Fadenmikrometer mit horizontal verschiebbarem Meßfaden, der auf den Stern während seiner Wanderung durch das Gesichtsfeld beliebig oft eingestellt werden kann. Durch die Ablesungen der Libelle und gegebenenfalls der Meßtrommel des Fadenmikrometers läßt sich die Differenz $z_2 - z_1$ der beiden Zenitdistanzen, in denen die Sterne beobachtet werden, sehr genau bestimmen — sie ist stets sehr klein, da sie den Spielraum der Libelle und des Mikrometers nicht überschreiten darf.

Setzt man in (III; 11) links die verschiedenen Werte $\cos z_1$ und $\cos z_2$ ein, rechts $t_1 = t - \lambda$, $t_2 = t + \lambda$ statt $t_1 = \tau_1 + \Delta u$, $t_2 = \tau_2 + \Delta u$, so erhält man nach Subtraktion und Division durch $\cos\delta_1 + \cos\delta_2$

$$\cos t \cos\lambda \frac{\cos\delta_1 - \cos\delta_2}{\cos\delta_1 + \cos\delta_2} + \sin t \sin\lambda =$$

$$= \operatorname{tg}\varphi \frac{\sin\delta_2 - \sin\delta_1}{\cos\delta_1 + \cos\delta_2} + \sec\varphi \frac{\cos z_1 - \cos z_2}{\cos\delta_1 + \cos\delta_2}.$$

Führt man außer den Bezeichnungen (III; 13) noch

$$z_1 = z - \Delta z, \quad z_2 = z + \Delta z$$

ein und bedenkt, daß $\Delta z = \frac{z_2 - z_1}{2}$ ein sehr kleiner Winkel ist, so ergibt sich

$$\frac{\cos z_1 - \cos z_2}{\cos\delta_1 + \cos\delta_2} = \frac{\sin\frac{z_2 - z_1}{2}\sin\frac{z_1 + z_2}{2}}{\cos\delta\cos\varepsilon} \sim \Delta z \sin z \sec\delta \sec\varepsilon,$$

und die Bestimmungsgleichung für t lautet dann

$$\cos t \cos\lambda \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varepsilon + \sin t \sin\lambda = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varepsilon + \Delta z \sin z \sec\varphi \sec\delta \sec\varepsilon.$$

---

[1]) N. ZINGER: Die Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen verschiedener Sterne. Aus dem Russischen von H. Kelchner, Leipzig 1877.

Setzt man hierin zur Abkürzung

$$\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{ctg}\lambda = \operatorname{tg}\gamma,$$

so ergibt sich

$$\sin(t+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varepsilon}{\sin\lambda}\cos\gamma + \Delta z \frac{\sin z \cos\gamma}{\sin\lambda\cos\varphi\cos\delta\cos\varepsilon}.$$

Da nun Δz sehr klein ist, so genügt es, für die Faktoren des letzten Gliedes dieser Gleichung grobe Näherungswerte einzusetzen. Insbesondere genügt es, bei ihrer Berechnung anzunehmen, daß $t = 0$ sei, die beobachteten Örter also in den Stundenwinkeln $\pm\lambda$ und in den Azimuten $\pm A$ liegen. Wegen der dritten Gleichung (II; 23) ist dann

$$\cos\delta\sin\lambda = \sin z \sin A.$$

Außerdem dürfen die cos der kleinen Winkel ε, γ gleich eins gesetzt werden, und man erhält

$$\sin(t+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varepsilon}{\sin\lambda}\cos\gamma + \frac{\Delta z}{\cos\varphi\sin A}$$

zur Bestimmung von t und damit von $\Delta u = t - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$. Da t und γ klein sind, reicht die Sinusformel für eine genaue Lösung der Aufgabe immer aus.

Die Sternpaare, die für die Anwendung der Zingerschen Methode geeignet sind, müssen so ausgewählt werden, daß ε möglichst klein (d. h. möglichst $\delta_1 = \delta_2$) und daß $\sin\lambda$ möglichst groß ist; doch ist, damit $t+\gamma$ hinreichend klein wird, der zulässige Spielraum für λ ziemlich groß. Die von Zinger selbst aufgestellte Liste von 160 Sternpaaren, die für die geographische Breite von *Pulkowo* (Rußland), $\varphi = 59°46'$, gültig ist, kann daher auch für ganz Nord- und Mitteleuropa ohne weiteres benutzt werden.

24. Zeitbestimmung durch Azimutmessungen

Die Korrektion Δu der Arbeitsuhr läßt sich auch durch Messung der anderen Koordinate eines Gestirns im Horizontsystem, des *Azimuts*, bestimmen. Refraktion und Parallaxe haben auf Azimutmessungen keinen oder (Mondparallaxe!) nur geringen Einfluß. Dafür aber haben Messungen des Azimuts gegenüber denen der Zenitdistanz den sehr unangenehmen Nachteil, daß sie sich nicht auf einen jederzeit physikalisch realisierbaren Nullpunkt beziehen. Ein in Höhe und Azimut drehbares Instrument mit feingeteiltem Azimutkreis (Theodolith, Universalinstrument, Altazimut), das für solche Beobachtungen geeignet ist, liefert zunächst nur relative Azimute (siehe Abschn. 12). Um aus ihnen absolute zu erhalten, muß zuvor das Azimut des Nullpunkts des Kreises bestimmt werden bzw. diejenige Kreisablesung, die der Südrichtung entspricht. Solche Nullpunktsbestimmungen, die bei Höhenkreisen verhältnismäßig einfach sind, erfordern bei Azimutkreisen gesonderte astronomische Beobachtungen. Azimutmethoden werden daher

in der Regel bei Ortsbestimmungen nur angewandt, wenn sie es erlauben, durch Kombination mehrerer Beobachtungen neben den eigentlichen Unbekannten des Problems auch den Nullpunktsfehler des Kreises mitzubestimmen, oder wenn nur die Differenzen der abgelesenen Azimute zur Verwendung kommen.

Hier sei nun zunächst angenommen, daß der Nullpunktsfehler des Kreises bekannt sei und die Messungen daher auf absolute Azimute zurückgeführt werden können. Sei A das beobachtete Azimut, und seien φ die geographische Breite des Standorts und α, δ die Koordinaten des Gestirns, so ergeben die zweite und dritte Gleichung (II; 23) nach Elimination von z

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos\delta \sin\varphi \cos t - \sin\delta \cos\varphi} = \frac{\sin t}{\sin\varphi \cos t - \operatorname{tg}\delta \cos\varphi} \qquad \text{(III; 17)}$$

oder auch

$$\cos t \sin\varphi \sin A - \sin t \cos A = \operatorname{tg}\delta \cos\varphi \sin A\,. \qquad \text{(III; 18)}$$

Das ist wieder eine Gleichung von der Form (III; 14) mit

$$a = \sin\varphi \sin A, \quad b = -\cos A, \quad c = \operatorname{tg}\delta \cos\varphi \sin A\,. \qquad \text{(III; 19)}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \cos A &= -\sin n \cos m, \\ \sin A \sin\varphi &= \cos n \cos m, \\ \sin A \cos\varphi &= \sin m \end{aligned} \qquad \text{(III; 20)}$$

und leitet daraus m und n ab, so nimmt (III; 18) die Form

$$\cos(t - n) = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} m \qquad \text{(III; 21)}$$

an, aus der die Tangentenformel

$$\operatorname{tg}^2 \frac{t-n}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} m}{1 + \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} m} = \frac{\cos(\delta + m)}{\cos(\delta - m)} \qquad \text{(III; 22)}$$

zur Bestimmung von t und damit der Uhrkorrektion $\Delta u = t - u + \alpha$ folgt.

Eine andere (algebraische) Lösung ergibt sich nach Anhang C II. Aus (III; 19) folgt

$$\alpha = \frac{a+c}{b} = -\operatorname{tg} A \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos\delta}, \quad \beta = \frac{a-c}{b} = -\operatorname{tg} A \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta} \qquad \text{(III; 23)}$$

und daher

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{t}{2} &= \frac{1}{\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 + \alpha\beta}\right) \\ &= -\frac{\cos\delta}{\operatorname{tg} A \sin(\varphi + \delta)}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 A}{\cos^2\delta} \sin(\varphi + \delta)\sin(\varphi - \delta)}\right) \\ &= -\frac{\cos\delta \cos A \pm \sqrt{\cos^2\delta \cos^2 A + \sin^2 A\,(\sin^2\varphi \cos^2\delta - \cos^2\varphi \sin^2\delta)}}{\sin A \sin(\varphi + \delta)}\,. \end{aligned}$$

Setzt man im ersten Glied unter der Wurzel $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, so erhält man einfacher

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = -\frac{\cos\delta\cos A \pm \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\varphi\sin^2 A}}{\sin A\sin(\varphi+\delta)}. \qquad \text{(III; 24)}$$

Theoretisch ergeben sich nach beiden Methoden zwei Lösungen t_1 und t_2, die auf Grund von (III; 21) durch die Beziehung

$$t_1 - n = -(t_2 - n) \quad \text{oder} \quad \frac{t_1 + t_2}{2} = n \qquad \text{(III; 25)}$$

miteinander verknüpft sind. Geometrisch wird dies durch Abb. 23 erläutert: Der Vertikal mit dem Azimut A wird von dem Kreis um den Himmelsnordpol P mit $\frac{\pi}{2} - \delta$ als Halbmesser in zwei Punkten S_1, S_2 geschnitten, die beide (in Wirklichkeit natürlich nur, wenn sie auf derselben Seite vom Zenit liegen) als Ort des beobachteten Sternes in Frage kommen. Fällt man von P das Lot auf den Vertikal, und bezeichnet man in dem rechtwinkligen Dreieck PZQ die Seite PQ mit m und den Winkel ZPQ mit n, so gelten nach den Grundformeln [Anhang A (5)] die Gleichungen (III; 20), so daß damit die geometrische Bedeutung der Hilfsgrößen m und n erwiesen ist. Auch die Gleichungen (III; 25) lassen sich aus der Abbildung ablesen; sie bedeuten, daß die Winkel S_1PQ und S_2PQ einander gleich sind. Über die richtige Lösung entscheiden die Beobachtungsbedingungen.

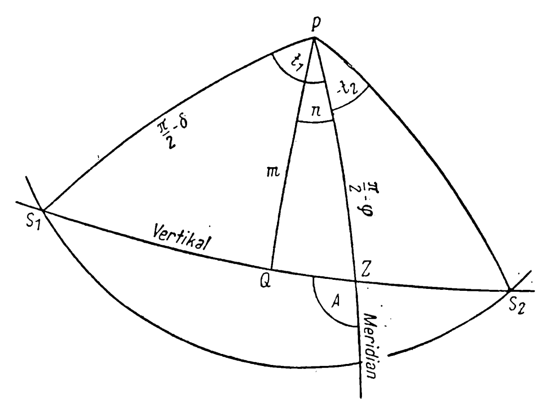


Abb. 23: Zeitbestimmung durch Azimutmessung. Zwei Lösungen

Es leuchtet ein, daß die Zeitbestimmung am schärfsten ausfällt, wenn die beiden geometrischen Örter von S_1, S_2 sich rechtwinklig schneiden. Das ist der Fall, wenn der Vertikal S_1ZS_2 durch den Pol geht, also mit dem Meridian identisch ist. Die beiden Örter S_1, S_2 entsprechen dann der oberen bzw. unteren Kulmination des Sterns, so daß über die Entscheidung zwischen ihnen kein Zweifel entstehen kann. Zum gleichen Ergebnis führen die Differentialformeln: Für konstantes φ, α, δ und $dt = d\Delta u$ ist nach (II; 28)

$$d\Delta u = \frac{\sin z}{\cos\delta\cos p}\,dA = \frac{df}{\cos\delta\cos p}, \qquad \text{(III; 26)}$$

wenn man mit

$$df = \sin z\,dA$$

den Abstand des Sternes vom Vertikalfaden des Gesichtsfeldes im Augenblick $\Theta = u + \Delta u$ des vermeintlichen Fadendurchgangs bezeichnet. Man erkennt, daß die Zeitbestimmung am genauesten ist, wenn $\delta = 0$ und $p = 0$, also für Äquatorsterne und im Meridian. Sie ist unmöglich für Sterne in der größten Digression. Betrachtet man den Fadenantritt als richtig beobachtet, aber das am Kreis abgelesene Azimut von dem des Fadens um den kleinen Betrag dA verschieden, so lehrt die Formel, daß der Einfluß dieses Fehlers am kleinsten ist, wenn z klein ist. Um den Einfluß des Nullpunktsfehlers des Kreises herabzudrücken, wird man also Sterne bevorzugen, die in Zenitnähe kulminieren. Eine Abhängigkeit des Fehlers der Zeitbestimmung von der geographischen Breite scheint nach (III; 26) nicht zu bestehen, sie ist aber tatsächlich vorhanden, da ja der Fehler dA von der Festlegung der Nord-Süd-Richtung abhängt, die in höheren Breiten ungenau, am Pol selbst unmöglich ist.

Um den Nullpunktsfehler des Azimutkreises zu bestimmen, beobachte man den Durchgang eines Sternes (über dessen Wahl noch zu entscheiden sein wird) durch den Vertikalfaden des Gesichtsfeldes. Die Durchgangszeit sei $\Theta = u + \Delta u$, das abgelesene Azimut A'. Wenn Δu und daher auch $t = \Theta - \alpha$ bekannt sind, läßt sich das wahre Azimut A nach (III; 17) berechnen. Man hat dann, solange die Stellung des Instruments unverändert bleibt, jedem abgelesenen Azimut die Korrektion $\Delta A = A - A'$ hinzuzufügen. Ist Δu nicht bekannt, so wähle man einen Stern, der durch eine seiner größten Digressionen geht. Nach (III; 26) ist nämlich

$$dA = \frac{\cos\delta\cos p}{\sin z}\, d\Delta u,$$

und in der größten Digression ($\cos p = 0$) hat daher ein Fehler der Uhrkorrektion auf die Berechnung des Azimuts keinen Einfluß. Noch vorteilhafter ist es, einen *polnahen* Stern in der größten Digression zu beobachten, da dann auch $\cos\delta$ klein ist. In unseren Breiten wird die Beobachtung des *Polarsterns* (α Ursae minoris, $\delta \sim 89°$) in der größten Digression immer zu einer äußerst scharfen Eichung des Azimutkreises führen, da dieser Stern dann sein Azimut während einer ziemlich langen Zeit überhaupt nicht merklich ändert.

25. Zirkummeridianazimute

Wenn wir Azimute in der Nähe des Meridians beobachten, wie es die Fehlerbetrachtungen des vorigen Abschnitts als vorteilhaft erkennen lassen, so erweist sich die strenge Formel (III; 24) zur Berechnung von t als gänzlich ungeeignet, da sie für die obere Kulmination (wobei das negative Vorzeichen der Wurzel gilt) den unbestimmten Wert 0 : 0 annimmt. Man benutzt dann besser die Reihenentwicklung [Anhang C III (23)], die wegen (III; 23) die Form

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\operatorname{tg} A \sin(\varphi - \delta)}{2\cos\delta}\left[1 - \frac{1}{4}\,y + \frac{1}{8}\,y^2 - \frac{5}{64}\,y^3 + \cdots\right]$$

mit

$$y = \alpha\beta = \operatorname{tg}^2 A \sec^2\delta \sin(\varphi - \delta)\sin(\varphi + \delta)$$

annimmt. Für kleine Azimute und besonders in der Nähe des Zenits, wo auch $\varphi - \delta$ klein ist, konvergiert diese Entwicklung außerordentlich rasch, so daß man sich meist mit dem ersten oder den beiden ersten Gliedern begnügen kann.

Will man diese Methode der Zeitbestimmung aus *Zirkummeridianazimuten* auch auf Sterne in der Nähe der unteren Kulmination anwenden, so bedenke man, daß dann in der Formel

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{1}{\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1+\alpha\beta}\right)$$

$t \sim \pi$ ist und das positive Vorzeichen der Wurzel gilt. Es ist dann $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ eine kleine Größe, und man findet (siehe auch Anhang C V)

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{\alpha}{1+\sqrt{1+\alpha\beta}} = \frac{\alpha(1-\sqrt{1+\alpha\beta})}{1-(1+\alpha\beta)} = -\frac{1}{\beta}\left(1-\sqrt{1+\alpha\beta}\right),$$

also

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = -\frac{\operatorname{tg} A \sin(\varphi+\delta)}{2\cos\delta}\left[1-\frac{1}{4}y+\frac{1}{8}y^2-\frac{5}{64}y^3+\cdots\right].$$

Man kann auch die Entwicklung Anhang C IV (28); C V benutzen, die für die ersten Glieder folgende Formeln liefert:

für obere Kulmination

$$t = -\beta + \frac{1}{12}\beta^2(3\alpha+\beta)\ldots, \qquad t^s = \frac{t}{15\sin 1''},$$

für untere Kulmination

$$t-\pi = -\alpha + \frac{1}{12}\alpha^2(\alpha+3\beta)\ldots, \qquad (t-12^h)^s = \frac{t-\pi}{15\sin 1''}.$$

26. Zeitbestimmung aus Durchgängen zweier Sterne durch den gleichen Vertikal. HARZERsche Fadenmethode

Die Schwierigkeit der Eichung des Azimutkreises entfällt, wenn man die Durchgangszeiten zweier Sterne durch den gleichen Vertikal beobachtet, da dann das Azimut selbst sich eliminieren läßt. Für die beiden Sterne ist dann $\operatorname{tg} A_1 = \operatorname{tg} A_2$, also entweder $A_2 = A_1$ oder $A_2 = A_1 + \pi$, je nachdem die Sterne sich auf der gleichen oder der entgegengesetzten Seite vom Zenit befinden. Beobachtungstechnisch spielt die letztgenannte Unterscheidung keine Rolle, da das Fernrohr bei festgeklemmter Azimutbewegung den ganzen Vertikal beherrscht.

Setzt man für zwei Sterne (t_1, δ_1) und (t_2, δ_2) die Ausdrücke (III; 17) gleich, so erhält man als Grundgleichung dieses Problems

$$\cos\delta_1 \sin t_1 (\cos\delta_2 \sin\varphi \cos t_2 - \sin\delta_2 \cos\varphi) =$$
$$= \cos\delta_2 \sin t_2 (\cos\delta_1 \sin\varphi \cos t_1 - \sin\delta_1 \cos\varphi). \qquad \text{(III; 27)}$$

Substituiert man hierin wie früher $t_1 = t - \lambda$, $t_2 = t + \lambda$, so ergibt sich nach kurzer Rechnung für die einzige Unbekannte $t = \frac{u_1 + u_2}{2} + \Delta u - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ wieder eine Gleichung von der Form $a \cos t + b \sin t = c$ mit

$$a = \operatorname{tg} \lambda \sin(\delta_1 + \delta_2),$$
$$b = \sin(\delta_1 - \delta_2),$$
$$c = 2 \operatorname{tg} \varphi \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \lambda.$$

Führt man die Hilfsgröße n durch

$$\operatorname{tg} n = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \lambda \frac{\sin(\delta_1 - \delta_2)}{\sin(\delta_1 + \delta_2)}$$

ein, so findet man t aus

$$\cos(t - n) = \frac{c}{a} \cos n = \frac{2 \cos n \operatorname{tg} \varphi \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \lambda}{\sin(\delta_1 + \delta_2)}. \quad \text{(III; 28)}$$

Oder man setzt nach Anhang C II

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\alpha} \left(1 \pm \sqrt{+ \alpha\beta}\right), \quad \text{(III; 29)}$$

wobei α und β durch Addition und Subtraktion der Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \lambda \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2)}{\sin(\delta_1 - \delta_2)}, \\ \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{c}{b} = 2 \operatorname{tg} \varphi \sin \lambda \frac{\cos \delta_1 \cos \delta_2}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(III; 30)}$$

erhalten werden.

Die Gleichungen (III; 28) oder (III; 29) haben zwei Lösungen. Geometrisch bedeutet das: Der Kreis um den Himmelsnordpol mit $\frac{\pi}{2} - \varphi$ als Halbmesser, auf dem das Zenit liegen muß, hat mit dem Vertikal der Beobachtungen zwei Schnittpunkte. Die günstigsten Beobachtungsbedingungen liegen vor, wenn diese beiden geometrischen Örter des Zenits sich rechtwinklig schneiden, d. h. also, wenn der Vertikal der Sterne mit dem Meridian zusammenfällt.

Für die beiden Beobachtungen gelten die Differentialbeziehungen (III; 26)

$$d\Delta u \cos p_1 \cos \delta_1 = dA_1 \sin z_1 = df_1,$$
$$d\Delta u \cos p_2 \cos \delta_2 = dA_2 \sin z_2 = df_2.$$

Da die Lage des Beobachtungsvertikals unbestimmt ist, eine Änderung dA seines Azimuts also keinen Einfluß auf das Ergebnis $d\Delta u$ hat, darf man in diesen Gleichungen zu dA_1, dA_2 eine willkürliche Größe dA hinzufügen.

Es ist also richtiger

$$\left.\begin{aligned} d\Delta u \cos p_1 \cos \delta_1 &= dA \sin z_1 + df_1, \\ d\Delta u \cos p_2 \cos \delta_2 &= dA \sin z_2 + df_2, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III; 31)}$$

wobei nunmehr df_1, df_2 die Abstände der Sterne von demjenigen Vertikal bedeuten, der durch den Vertikalfaden des Fernrohrgesichtsfeldes repräsentiert wird. Eliminiert man dA aus (III; 31), so erhält man

$$d\Delta u\,(\cos p_1 \cos \delta_1 \sin z_2 - \cos p_2 \cos \delta_2 \sin z_1) = df_1 \sin z_2 - df_2 \sin z_1$$

und, wenn man die zweite Gleichung (II; 29) berücksichtigt,

$$\cos \varphi\, d\Delta u = \frac{df_1 \sin z_2 - df_2 \sin z_1}{\cos A_1 \cos z_1 \sin z_2 - \cos A_2 \sin z_1 \cos z_2}.$$

Da nun, wie schon erwähnt, $A_2 = A_1$ oder $A_2 = A_1 + \pi$, also $\cos A_2 = \pm \cos A_1$, vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$\cos \varphi\, d\Delta u = \frac{df_1 \sin z_2 - df_2 \sin z_1}{\cos A_1 \sin (z_2 \mp z_1)}.$$

Bezeichnen wir mit $\varepsilon_{\Delta u}$ den mittleren Fehler der Bestimmung von Δu und mit ε den mittleren Fehler der Fadenantritte, d. h. den statistischen Mittelwert der Fadenabstände df_1, df_2, so folgt nach Anhang D

$$\cos \varphi \cdot \varepsilon_{\Delta u} = \varepsilon \left| \frac{\sqrt{\sin^2 z_1 + \sin^2 z_2}}{\cos A_1 \sin (z_2 \mp z_1)} \right|. \qquad \text{(III; 32)}$$

Der Einfluß des Einstellungsfehlers ist demnach, wie zu erwarten war, am kleinsten im Meridian, wo $\cos A_1 = \pm 1$. Liegen die Sterne auf der gleichen Seite vom Zenit, so wird man, damit der Betrag von $\sin (z_2 - z_1)$ möglichst groß werde, die Zenitdistanzen möglichst verschieden wählen, also einen zenitnahen und einen horizontnahen Stern beobachten. Man erhält dann im günstigsten Falle $\cos \varphi\ \varepsilon_{\Delta u} \sim \varepsilon$. Liegen die Sterne beiderseits des Zenits, so gilt im Nenner von (III; 32) das positive Zeichen. Bei festem A_1 und z_1 hat dann der Ausdruck (III; 32) ein Minimum, wenn $z_2 = z_1$, und es wird

$$\cos \varphi \cdot \varepsilon_{\Delta u} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} \cos A_1 \cos z_1}.$$

Man gelangt somit zu den günstigsten Bedingungen, wenn man Sternpaare auswählt, die nördlich und südlich des Zenits in *kleinen* und *gleichen* Zenitdistanzen den *Meridian* überschreiten, und es ist dann

$$\cos \varphi \cdot \varepsilon_{\Delta u} \sim \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Nach P. Harzer läßt sich die Zeitbestimmung aus Durchgängen zweier Sterne durch den gleichen (meridiannahen) Vertikal auch ohne jedes Instrument durchführen, wenn man mit der bescheidenen Genauigkeit zufrieden ist, die man aus Beobachtungen mit bloßem Auge erwarten kann. Vier

senkrecht in die Erde getriebene Stangen, z. B. starke Bohnenstangen, die oben durch vier Querstangen miteinander verbunden sind (Abb. 24), bilden ein Gerüst. Die Querstangen sollen ungefähr in ost-westlicher bzw. nord-südlicher Richtung verlaufen. Durch zwei Ösen *A* und *B*, die in der Mitte der ost-westlich gerichteten Querstangen an deren Unterseite angebracht sind, wird ein Faden gezogen, dessen Enden zusammengeknüpft und mit einem Gewicht *G* beschwert werden. Läßt man das Gewicht frei hängen, so bildet der straff gespannte Faden ein Dreieck, das eine dem Meridian benachbarte Vertikalebene definiert. Der Durchgang eines Südsterns durch diesen Vertikal ereignet sich, wenn sich für das Auge des am Nordende des Gerüsts befindlichen Beobachters die Fadenteile *AB* und *AG* decken und gemeinsam vor dem Stern erscheinen. Zur Beobachtung des Nordsterns begibt sich der Beobachter auf die Südseite des Gerüsts und visiert den Stern über die Fadenteile *BA* und *BG* an. Vorbedingung für das Gelingen der Beobachtung ist, daß der Faden ruhig hängt, also nicht durch Wind in pendelnde Bewegung versetzt wird. Bei nicht zu starker Luftbewegung lassen sich die Schwingungen des Fadendreiecks leicht dämpfen, indem man das Gewicht in ein Gefäß mit Wasser hängen läßt. Als Beobachtungsuhr genügt bei diesem Verfahren, das als Harzer*sche Fadenmethode* bekannt ist, eine Taschenuhr mit Sekundenzeiger. Die Bestimmung des Uhrfehlers gelingt gewöhnlich bis auf wenige Zehntel einer Zeitminute.

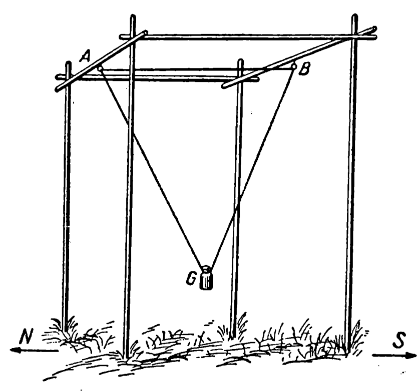


Abb. 24: Das Harzersche Fadendreieck

27. Zeitbestimmung aus gleichzeitigem Durchgang zweier Sterne durch den gleichen Vertikal

Eine Variante der im vorigen Abschnitt beschriebenen Zeitbestimmungsmethode ergibt sich, wenn man zusätzlich fordert, daß die beiden Sterndurchgänge durch den gleichen Vertikal auch *gleichzeitig* erfolgen sollen. Auf den ersten Blick scheint es, als ob diese Bedingung beobachtungstechnisch unerfüllbar sei. Das ist jedoch, wenn man einige Einschränkungen in Kauf nimmt, nicht der Fall. Begnügt man sich z. B. mit Beobachtungen ohne Instrument, also mit bloßem Auge, so kann man die Harzer*sche Fadenmethode* (Abschnitt 26) variieren, indem man lediglich einen senkrecht hängenden beschwerten Faden benutzt. Ein Beobachter kann dann den gleichzeitigen Durchgang zweier Sterne durch den gleichen Vertikal leicht feststellen, indem er den Zeitpunkt vermerkt, an dem der Faden beide Sterne gleichzeitig verdeckt.[1])

[1]) Hierbei befinden sich beide Sterne natürlich auf der gleichen Seite vom Zenit. Für unsere Breiten gelingt dieses einfache Verfahren am besten für den Polarstern und einen Zeitstern in der Nähe der unteren Kulmination (siehe Abschnitt 28).

Mit einem Universalinstrument oder einem Theodolith ist diese Methode nur dann anwendbar, wenn sich das Azimut des einen Sternes in der Zeit zwischen beiden Beobachtungen nicht merklich ändert, d. h. also, wenn sich etwa der Nordstern S_1 in der größten Digression befindet. Da die Beobachtungen außerdem in einem meridiannahen Vertikal erfolgen sollen, wählt man für S_1 möglichst einen polnahen Stern. Ist z. B. S_1 der Polarstern in der Nähe seiner größten Digression, S_2 ein zweiter Stern, der als *Zeitstern* bezeichnet werden möge, so stellt man zuerst den Vertikalfaden des Instruments auf S_1 ein, beobachtet dann die Durchgangszeit von S_2 und visiert dann wiederum S_1 an. Es wird sich dann zeigen, ob in der Zwischenzeit das Azimut von S_1 unverändert geblieben ist und es somit erlaubt ist, die Beobachtungszeit von S_2 auch für S_1 anzusetzen. Ist das Instrument (etwa ein Passageinstrument mit verstellbarem Azimut) mit einem Fadenmikrometer mit meßbar verstellbarem Vertikalfaden ausgerüstet, so ist man nicht an die größte Digression des Polarsterns gebunden. Die Bewegung dieses Sternes im Azimut ist auch in anderen Phasen seiner täglichen Bewegung so langsam, daß die Gleichsetzung der Beobachtungszeiten in erster Näherung stets erlaubt ist — eine Verbesserung des Ergebnisses läßt sich durch Auswertung der Mikrometermessungen leicht erzielen.

Die Methode der Zeitbestimmung im Vertikal des Polarsterns ist eine der schönsten und genauesten ihrer Art; sie soll im nächsten Abschnitt gesondert behandelt werden. Für die allgemeine Lösung der Aufgabe, den Uhrstand aus dem gleichzeitigen Durchgang zweier Sterne durch einen beliebigen Vertikal von unbekanntem Azimut zu ermitteln, kann man sich der Formeln des vorigen Abschnitts bedienen, wobei nur $u_1 = u_2 = u$ und daher

$$t = u + \Delta u - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

$$\lambda = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$$

zu setzen ist. Vorzuziehen ist aber folgende sehr elegante und symmetrische Methode:

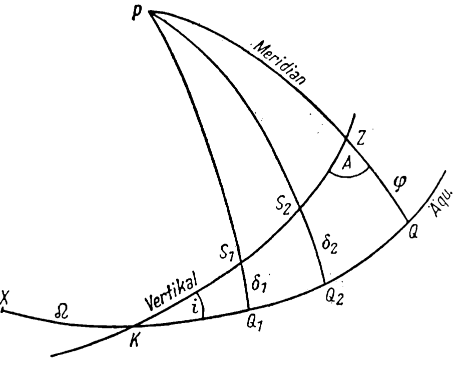


Abb. 25: Zwei Sterne gleichzeitig im gleichen Vertikal

Es sei (Abb. 25) XKQ der Himmelsäquator mit dem Frühlingspunkt X, PZQ der Meridian mit dem Nordpol P und dem Zenit Z. KZ sei der gemeinsame Vertikal, in dem die beiden Sterne S_1 und S_2 beobachtet werden. Seine Lage an der Sphäre wird bestimmt durch seine Neigung i gegen den Himmelsäquator und die Rektaszension $☊ = XK$ des „Knotens“ K. Es sind dann die Rektaszensionen von S_1, S_2 und Z

$$\alpha_1 = XQ_1, \quad \alpha_2 = XQ_2, \quad \Theta = XQ,$$

wobei Θ die Sternzeit der Beobachtung bedeutet und

$$\delta_1 = S_1Q_1, \quad \delta_2 = S_2Q_2, \quad \varphi = ZQ$$

die Deklinationen dieser Örter sind. In den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken KS_1Q_1, KS_2Q_2, KZQ ist sodann nach Anhang A II (6), dritte Gleichung,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin(\alpha_1 - \Omega) &= \operatorname{tg} \delta_1, \\ \operatorname{tg} i \sin(\alpha_2 - \Omega) &= \operatorname{tg} \delta_2, \\ \operatorname{tg} i \sin(\Theta - \Omega) &= \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{III}; 33)$$

Die ersten beiden dieser Gleichungen sind, wenn man die Sinusausdrücke auflöst, in $\operatorname{tg} i \sin \Omega$ und $\operatorname{tg} i \cos \Omega$ linear und ergeben

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin \Omega &= \frac{\operatorname{tg}\delta_2 \sin\alpha_1 - \operatorname{tg}\delta_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ \operatorname{tg} i \cos \Omega &= \frac{\operatorname{tg}\delta_2 \cos\alpha_1 - \operatorname{tg}\delta_1 \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{aligned}\right\} \qquad (\text{III}; 34)$$

zur Bestimmung von i und Ω. Die dritte Gleichung liefert dann die Sternzeit Θ aus

$$\sin(\Theta - \Omega) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} i,$$

und zwar mit genügender Schärfe, da der Vertikal meridiannah sein soll und daher $i \sim \frac{\pi}{2}$, also $\operatorname{ctg} i$ und somit auch $\Theta - \Omega$ klein ist. Das Azimut A des gemeinsamen Vertikals der Sterne ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck KZQ nach Anhang A II (5), erste Formel, durch

$$\sin A = \cos i \sec \varphi.$$

28. Zeitbestimmung im Vertikal des Polarsterns

Steht einer der beiden Sterne (S_1) sehr dicht am Himmelspol (z. B. für die nördliche Halbkugel der Polarstern α Urs. min, $\delta = 89°2'$, für die südliche der ziemlich schwache Stern σ Octantis, $\delta = -89°8'$[1]), so lassen sich neben den Formeln der Abschnitte 26 und 27 noch rasch konvergierende Reihen für den gesuchten Stundenwinkel des Zeitsterns S_2 angeben. Nachstehend möge die von W. Doellen[2]) entwickelte und von P. Harzer[3]) verbesserte Methode dieser Art Platz finden.

---

[1]) Deklinationen für 1950.

[2]) W. Doellen: Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsinstrumentes im Verticale des Polarsternes. St. Petersburg 1863, 1874.

[3]) P. Harzer: Über die Zeitbestimmung im Vertikale des Polarsternes. Publ. der Sternwarte Kiel X, 1899.

Im Dreieck PS_1S_2 (Abb. 26) sei $\lambda = t_1 - t_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ der Winkel am Pol und ω der immer sehr kleine Winkel am Zeitstern. Ist b die Länge des Bogens S_1S_2, so ist nach den Grundformeln der Sphärischen Trigonometrie

$$\sin b \sin \omega = \cos \delta_1 \sin \lambda,$$

$$\sin b \cos \omega = \sin \delta_1 \cos \delta_2 - \cos \delta_1 \sin \delta_2 \cos \lambda$$

und daher

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_2 \cos \lambda} \sec \delta_2 . \qquad \text{(III; 35)}$$

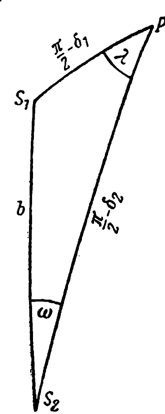


Abb. 26: Zeitstern (S_2) im Azimut des Polarsterns (S_1)

Die Extrema von ω sind für mäßige δ_2 von der Größenordnung $\frac{\pi}{2} - \delta_1 \sim \frac{1}{60}$, so daß Entwicklungen nach Potenzen von ω gute Konvergenz versprechen.

Zur Durchführung einer solchen Reihenentwicklung für den Stundenwinkel des Zeitsterns ist es erwünscht, von Formeln des Typus (III; 29) auszugehen. Es ist jedoch zweckmäßig, auf die Symmetrie zu verzichten, wie sie sich etwa in (III; 30) ausdrückt, denn die beiden Sterne nehmen ja in diesem Problem eine ganz verschiedene Stellung ein. Man wähle daher jetzt als Unbekannte statt des arithmetischen Mittels der beiden Stundenwinkel den des Zeitsterns allein, d. h. den Winkel

$$t = t_2,$$

der klein ist, wenn S_2 in der Nähe der oberen, und nahezu gleich π, wenn S_2 in der Nähe der unteren Kulmination steht. Im ersteren Falle ist also $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$, im letzteren $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$ eine kleine Größe. Man setze ferner

$$t_1 = t + \lambda,$$

wobei λ die in (III; 35) und Abb. 26 benutzte Größe bedeutet. Mit diesen Werten für t_2 und t_1 nimmt die Gleichung (III; 27) nach kurzer Rechnung die Form

$$\operatorname{tg} \delta_2 \sin \lambda \cos t + (\operatorname{tg} \delta_2 \cos \lambda - \operatorname{tg} \delta_1) \sin t = \operatorname{tg} \varphi \sin \lambda$$

an. Sie ist wiederum vom Typ (III; 14) mit

$$a = \operatorname{tg} \delta_2 \sin \lambda, \quad b = \operatorname{tg} \delta_2 \cos \lambda - \operatorname{tg} \delta_1, \quad c = \operatorname{tg} \varphi \sin \lambda$$

und hat nach Anhang C II (22) die Lösungen

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\alpha} \left(1 \mp \sqrt{1 + \alpha\beta}\right),$$

wobei

$$\alpha = \frac{a + c}{b} = -\operatorname{tg} \omega \frac{\sin (\varphi + \delta_2)}{\cos \varphi}, \qquad \beta = \frac{a - c}{b} = -\operatorname{tg} \omega \frac{\sin (\varphi - \delta_2)}{\cos \varphi}$$

wie man mit Hilfe von (III; 35) leicht herleitet. Wegen des kleinen Faktors $\operatorname{tg}\omega$ sind α und β beide klein (ausgenommen in sehr hohen Breiten, wo diese Methode ohnehin ihre Vorzüge einbüßt). Man benutzt also mit Vorteil die Entwicklung [Anhang C III (23)]

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega\sec\varphi\sin(\varphi-\delta_2)\left[1-\frac{1}{4}\eta+\frac{1}{8}\eta^2-\frac{5}{64}\eta^3+\cdots\right], \quad \text{(III; 36)}$$

mit $\eta = \alpha\beta = \operatorname{tg}^2\omega\sec^2\varphi\sin(\varphi-\delta_2)\sin(\varphi+\delta_2)$,

wenn S_2 in der Nähe der *oberen* Kulmination beobachtet wird. Für die *untere* Kulmination erhält man entsprechend ($t = \pi + t'$)

$$-\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\frac{t'}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega\sec\varphi\sin(\varphi+\delta_2)\left[1-\frac{1}{4}\eta+\frac{1}{8}\eta^2-\frac{5}{64}\eta^3+\cdots\right]. \quad \text{(III; 37)}$$

Beide Formeln haben große Ähnlichkeit mit denen für die Zeitbestimmung aus Zirkummeridianazimuten (Abschnitt 25).

Will man eine Reihenentwicklung für die Stundenwinkel selbst haben, so schreibt man nach Anhang C IV (28) für obere Kulmination

$$t = -\beta + \frac{1}{12}(\beta^3 + 3\beta^2\alpha) - \frac{1}{80}(\beta^5 + 5\beta^4\alpha + 10\beta^3\alpha^2) + \cdots, \quad \text{(III; 38)}$$

während für untere $t' = t - \pi$ aus (III; 38) durch Vertauschung von α und β hervorgeht (Anhang C V).

Wenn der Zeitstern in der Nähe des Zenits kulminiert, so ist $\varphi - \delta_2$ klein, und β wird daher klein von der zweiten Ordnung. In diesem Falle konvergieren die Reihen (III; 36), (III; 38) so rasch, daß es auch bei strengen Genauigkeitsanforderungen fast immer genügt, sich auf das erste Glied der Entwicklung zu beschränken. Für die untere Kulmination kann dieser günstige Fall nicht eintreten, da $\sin(\varphi + \delta_2)$ nur in der Nähe des Nadirs verschwindet. Aber auch hier wird man selten über das zweite Glied der Entwicklung hinauszugehen brauchen.

29. Zeitbestimmung aus Meridiandurchgängen. Das Passageinstrument

Für Zeitbestimmungen auf Sternwarten und bei geodätischen Arbeiten, wo es auf äußerste Genauigkeit ankommt, werden fast ausschließlich Instrumente verwendet, die zur Beobachtung von Sterndurchgängen durch den Meridian geeignet sind. Solche Geräte heißen *Meridiankreise*, wenn sie einen fein geteilten Kreis zur Messung von Zenitdistanzen tragen, und *Passageinstrumente*, wenn nur ein grob geteilter Einstellungskreis vorhanden ist.

Das *Passage-* oder *Durchgangsinstrument* ist ein Fernrohr, das sich um eine horizontale, mit ihren Enden auf festen Lagern ruhende Achse drehen

läßt. Ist diese Achse genau horizontal und genau von Westen nach Osten gerichtet, und steht die optische Achse des Fernrohrs auf der Achse des Instruments genau senkrecht, so deckt sich ein im Gesichtsfeld ausgespannter Vertikalfaden, der die optische Achse schneidet, in jeder Lage des Instruments genau mit dem Meridian des Himmels.

Um mit Hilfe eines solchen idealen Instruments die Ortssternzeit zu bestimmen, genügt es, die Uhrzeit des Durchgangs irgendeines Sternes mit bekannter Rektaszension durch den Vertikalfaden zu beobachten. Ist die Sternzeit des Durchgangs u, so ist die Uhrkorrektion durch

$$\Delta u = \alpha - u \quad \text{oder} \quad \Delta u = \alpha - u + 12^{\mathrm{h}}$$

gegeben, je nachdem der Meridiandurchgang in oberer oder unterer Kulmination erfolgt. Ein Beobachtungsfehler $d\Delta u$ könnte dann nur dadurch entstehen, daß die Uhrzeit u notiert wird, wenn das Bild des Sterns nicht genau durch den Faden biseziert wird, sondern sich in einem kleinen Abstand df vom Faden befindet. Ist (Abb. 27) $dt = d\Delta u$ der dem Meridianabstand $df = SQ$ entsprechende kleine Stundenwinkel des Sterns, so ist in dem bei Q rechtwinkligen Dreieck PSQ

$$dt = df \sec \delta,$$

d. h., die Zeitbestimmung ist von dem Einstellfehler am wenigsten abhängig, wenn $\delta = 0$ ist, also für Äquatorsterne, die ja den Faden mit der größtmöglichen Winkelgeschwindigkeit überschreiten.

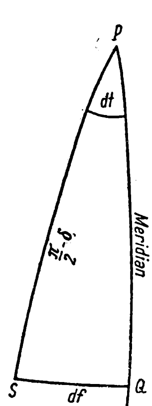


Abb. 27: Abstand vom Vertikalfaden

In Wirklichkeit sind die eben angenommenen Voraussetzungen nicht streng erfüllt. Das Westende der Achse ist nicht genau nach dem Westpunkt des Horizonts gerichtet, sondern nach einem Punkt, dessen Azimut $\frac{\pi}{2} - k$ und dessen Höhe i betragen möge. Die kleinen Größen k und i heißen *Azimutfehler* und *Neigungsfehler* des Instruments. Der Vertikalfaden des Gesichtsfeldes (oder das Abszissenmittel einer größeren Anzahl symmetrisch angeordneter Vertikalfäden oder die Normalstellung eines parallel zu sich selbst durch eine Mikrometerschraube meßbar verschiebbaren beweglichen Vertikalfadens), an dem die Zeiten der Sterndurchgänge gemessen werden, bezeichnet nicht die auf der Achse senkrechte Richtung, sondern bildet mit dem Westende der Achse den Winkel $\frac{\pi}{2} + c$. Man nennt c den *Kollimationsfehler* des Fernrohrs. Hierbei muß bemerkt werden, daß sich das Instrument aus seinen Lagern herausheben und umlegen läßt. Die beiden Enden der Achse unterscheiden sich dadurch, daß sich an einem Ende der Höheneinstellungskreis befindet — die beiden Fernrohrlagen bezeichnet man demnach als „Kreis West" bzw. „Kreis Ost" (oder auch nach der Lage der Befestigungsklemmen des Fernrohrs als „Klemme West bzw. Ost"). Ist der Kollimationsfehler in der Kreislage West $+ c$, so ist er $- c$ in der Kreislage Ost.

In Abb. 28 sei nun W das auf die Sphäre übertragene Westende der Achse mit dem Azimut $\frac{\pi}{2} - k$ und der Zenitdistanz $\frac{\pi}{2} - i$, G der Gestirnsort, dessen Abstand von W im Zeitpunkt der Beobachtung $\frac{\pi}{2} + c$ (Kreis West) betrage, während t, A, z die gewöhnliche Bedeutung haben. Im Dreieck WZG gilt dann nach dem Cosinussatz

$$- \sin c = \sin i \cos z + \cos i \sin z \sin (k + A).$$

Drückt man hierin $\cos z$, $\sin z \cos A$ und $\sin z \sin A$ durch (II; 23) aus, so erhält man

$$- \sin c = \sin i (\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t) +$$
$$+ \cos i [\cos k \cos \delta \sin t - \sin k (\sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos t)]. \quad \text{(III; 39)}$$

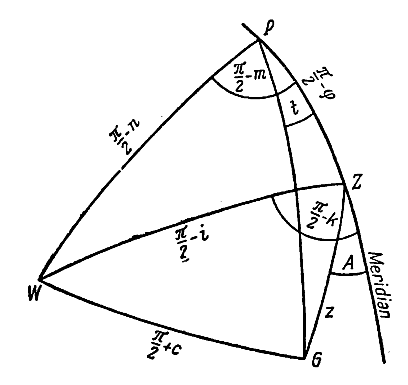


Abb. 28: Zur Theorie des Passageinstruments

Da nun c, i, k, t sehr kleine Winkel sind, darf man die Sinus durch die Bogen, die Cosinus durch eins ersetzen und erhält

$$- c = i \cos (\varphi - \delta) + t \cos \delta + k \sin (\varphi - \delta)$$

oder, da

$$= u + \Delta u - \alpha,$$

$$\Delta u = \alpha - [u + i \cos (\varphi - \delta) \sec \delta + k \sin (\varphi - \delta) \sec \delta + c \sec \delta]. \quad \text{(III; 40)}$$

Dies gilt für die *obere Kulmination*. In der unteren Kulmination ist $t = 12^h + t' = u + \Delta u - \alpha - 12^h$ und, da t' klein ist, $\cos t = - \cos t' = - 1$, $\sin t = - \sin t' = - t'$ zu setzen. Somit folgt aus (III; 39)

$$- c = - i \cos (\varphi + \delta) - t \cos \delta - k \sin (\varphi + \delta),$$

also für die *untere Kulmination*

$$\Delta u = \alpha + 12^h - [u + i \cos (\varphi + \delta) \sec \delta + k \sin (\varphi + \delta) \sec \delta - c \sec \delta]. \quad \text{(III; 41)}$$

Man bezeichnet (III; 40) und (III; 41) als die MAYER*schen*[1]) *Formeln* für die Uhrkorrektion. Sie gelten für Kreis West — nach Umlegen des Instruments (Kreis Ost) ist c mit $- c$ zu vertauschen.

---

[1]) Nach JOH. TOBIAS MAYER (1723—1762), der diese Formeln zuerst bei der Reduktion von Meridianbeobachtungen benutzte.

Die *Neigung* i des Instruments wird gewöhnlich direkt mit einer Libelle gemessen, die sich an den Zapfen der Achsen einhängen läßt. Die Uhrzeit u läßt sich somit unmittelbar wegen der Neigung korrigieren, und man erhält

$$u' = u + i \cos(\varphi \mp \delta) \sec \delta,$$

wobei das obere Zeichen für obere Kulmination gilt.

Die *Kollimation* c bestimmt man, indem man einen polnahen Stern ($\delta > 80°$) in derselben Kulmination und in beiden Kreislagen beobachtet. (Da der Stern nur langsam durch das Gesichtsfeld läuft, hat man zum Umlegen des Instruments genügend Zeit.) Es ist dann z. B.[1])

$$\Delta u = \alpha - [u_1' + k \sin(\varphi - \delta) \sec \delta + c \sec \delta] \quad \text{(ob. Kulm., Kr. West)},$$

$$\Delta u = \alpha - [u_2' + k \sin(\varphi - \delta) \sec \delta - c \sec \delta] \quad \text{(ob. Kulm., Kr. Ost)}.$$

Die Differenz ergibt

$$u_2' - u_1' = 2\,c \sec \delta,$$

woraus, da $\sec \delta$ stets ein großer Faktor ist, c mit großer Genauigkeit bestimmt werden kann.

Die *tägliche Aberration* der Gestirne, die im Meridian die maximale Veränderung des Stundenwinkels bewirkt, muß bei genauen Zeitbestimmungen auch berücksichtigt werden. Setzt man in (I; 48), erste Formel, $\cos t = \pm 1$ (wobei wie oben das obere Zeichen für die obere Kulmination gilt), so ergibt sich als Korrektion des Stundenwinkels

$$\pm\, 0{,}''32 \cos \varphi \sec \delta;$$

sie verläuft ebenso wie die Korrektion wegen Kollimation proportional mit $\sec \delta$. Man kann daher die Kollimationskonstante mit der Konstante der täglichen Aberration

$$0{,}''32 \cos \varphi = 0^s{,}0213 \cos \varphi$$

vereinigen, indem man in der Kreislage West c um diesen Betrag vermindert, in der anderen Lage dagegen vermehrt.

Ist auch das (um die Aberration verbesserte) Kollimationsglied bekannt und angebracht: $u'' = u' \pm c \sec \delta$, so kann man den *Azimutfehler* k bestimmen, indem man zwei polnahe Sterne beobachtet, die nacheinander durch die obere bzw. untere Kulmination gehen. Man erhält dann die Gleichungen

$$\Delta u = \alpha_1 - [u_1'' + k \sin(\varphi - \delta_1) \sec \delta_1] \quad \text{(ob. Kulm.)},$$

$$\Delta u = \alpha_2 + 12^h - [u_2'' + k \sin(\varphi + \delta_2) \sec \delta_2, \quad \text{(unt. Kulm.)}.$$

---

[1]) Die Uhrzeiten u_1' und u_2' der beiden Beobachtungen sind selbstverständlich auf die gleiche Stelle des Gesichtsfeldes (z. B. den mittleren Vertikalfaden) zu beziehen.

deren Differenz für k die Beziehung

$$k\,[\sin(\varphi+\delta_2)\sec\delta_2 - \sin(\varphi-\delta_1)\sec\delta_1] = 12^h + \alpha_2 - \alpha_1 - (u_2'' - u_1'')$$

liefert. Der Faktor von k ist groß, da die Faktoren $\sec\delta_1$ und $\sec\delta_2$ groß sind und $\sin(\varphi+\delta_2)$ und $\sin(\varphi-\delta_1)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Nach der Ermittlung der Instrumentalfehler i, k, c kann man dann Δu aus der Beobachtung von Zeitsternen, d. h. Sternen niedriger Deklination, ableiten. Wenn man zur Erhöhung der Genauigkeit eine größere Anzahl von Zeitsternen beobachtet hat, bedient man sich bei der Reduktion der Ergebnisse statt der MAYERschen Formeln vielfach anderer, die von BESSEL aufgestellt wurden:

Bezeichnet man mit n die Deklination und mit $\frac{\pi}{2} - m$ den Stundenwinkel des Westpunkts W der Instrumentenachse (Abb. 28), so folgt aus dem Dreieck PWG

$$-\sin c = \sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \sin(m+t) \qquad \text{(III; 42)}$$

und hieraus, wenn man c, m, n, t als klein ansieht,

$$t = -(m + n \operatorname{tg}\delta + c\sec\delta)$$

oder

$$\Delta u = \alpha - (u+m) - (n \operatorname{tg}\delta + c\sec\delta)$$

für *obere* Kulmination und entsprechend

$$\Delta u = \alpha + 12^h - (u+m) + (n\operatorname{tg}\delta + c\sec\delta)$$

für *untere* Kulmination. Diese Formeln gelten für Kreis West. Für Kreis Ost ist wieder c durch $-c$ zu ersetzen. Die Größen m und n werden aus dem Dreieck PZW mit Hilfe der Grundformeln

$$\cos n \sin m = \sin i \cos\varphi + \cos i \sin\varphi \sin k,$$
$$\sin n = \sin i \sin\varphi - \cos i \cos\varphi \sin k$$

abgeleitet oder, wenn m, n, i, k als klein angesehen werden, aus

$$m = i\cos\varphi + k\sin\varphi,$$
$$n = i\sin\varphi - k\cos\varphi.[1]$$

30. Sonnenuhren

Sofern es nicht auf große Genauigkeit ankommt, läßt sich der sphärische Ort der *Sonne* aus Richtung und Länge der Schatten bestimmen, die ihr Licht von geeigneten Gegenständen erzeugt. Schon im Altertum wurden nach diesem Prinzip *Sonnenuhren* konstruiert, die es gestatten, aus dem Schattenwurf meist stabförmiger Körper auf eine geeignet eingeteilte Unterlage die wahre Sonnenzeit abzulesen.

[1]) Die BESSELschen Formeln sind bei Reihenbeobachtungen sehr bequem, da sie als additive Konstante mit der Uhrzeit vereinigt erscheint und die Faktoren von n und c nur von der Deklination des beobachteten Sterns abhängen.

Die einfachste Form der Sonnenuhr wird *Gnomon* genannt und besteht aus einem senkrechten Stab, dessen Schatten auf eine horizontale Unterlage fällt. Es ist klar, daß das Azimut des Schattens gleich dem um 180° vermehrten Azimut der Sonne und die Schattenlänge proportional dem Tangens der Zenitdistanz der Sonne ist. Man kann also bei Auswertung von Länge und Azimut des Schattens die Formeln (I;6) zur Bestimmung der wahren Sonnenzeit benutzen oder, wenn man nur die Länge bzw. nur das Azimut verwenden will, die Formeln (III; 2) bzw. (III; 22). Die zur Definition der Azimute notwendige Nord-Süd-Richtung findet man dabei leicht als Winkelhalbierende derjenigen Richtungen, in denen der Schatten vormittags und nachmittags gleiche Länge annimmt — die kleine Korrektion wegen der Mittagsverbesserung (Abschnitt 19) darf dabei vernachlässigt werden, da sie meist weit innerhalb der Genauigkeitsgrenzen liegt, die dem Gnomon eigentümlich sind.

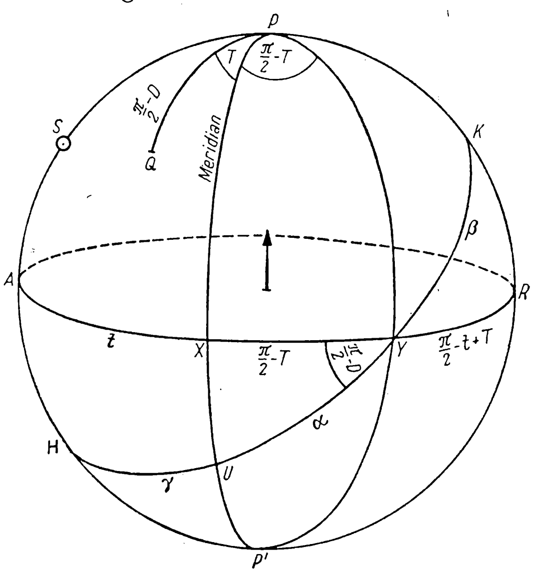


Abb. 29: Zur Theorie der Sonnenuhr[1])

Will man aus der Schattenrichtung unmittelbar die wahre Sonnenzeit ablesen, so daß der Schatten des Stabes unabhängig von der Jahreszeit als Uhrzeiger gelten kann, so muß man dafür sorgen, daß die *Schattenebene*, d. h. diejenige Ebene, die durch die Sonne und den Schattenstab gebildet wird, stets mit der Ebene des Stundenkreises der Sonne zusammenfällt. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn der Schattenstab die Richtung der *Weltachse* einnimmt. Die Lage der Zifferblattebene ist dann in sehr weiten Grenzen beliebig und die Schattenrichtung, die einer bestimmten Stunde wahrer Sonnenzeit entspricht, von der Deklination der Sonne unabhängig. Die Einteilung des Zifferblatts, die dann für alle Zeiten gültig ist, besteht aus einem Strahlenbüschel, das vom Fußpunkt des Schattenstabs ausgeht und dessen Strahlen nach den Stunden der wahren Sonnenzeit und ihren Bruchteilen zu numerieren sind.

Die Theorie der Sonnenuhren lehrt das Verfahren der Konstruktion der Zifferblatteinteilung, die von der Lage der Zifferblattebene im System des Horizontes abhängig ist. In Abb. 29 sei P der Himmelsnordpol, $AXYR$ der Himmelsäquator, S die Sonne — der Randkreis der Abbildung stelle also den

[1]) Siehe Fußnote zu Abb. 6.

Stundenkreis der Sonne dar. Die Zifferblattebene schneide die Sphäre in dem Größtkreis $HUYK$, und Q sei der Pol dieses Kreises. Die Richtung des Schattenstabes, die der Weltachse parallel ist, sei durch den Pfeil angedeutet. $PXUP'$ sei der Meridian. Dann ist $XA = t$ der Stundenwinkel der Sonne, und wenn T der Stundenwinkel, D die Deklination des Zifferblattpols bezeichnen, so ist $XY = \frac{\pi}{2} - T$, $YR = \frac{\pi}{2} - t + T$ (da ja $AXYR = \pi$), ferner $QP = \sphericalangle XYU = \frac{\pi}{2} - D$.

Auf dem Zifferblattkreise werden die Abschnitte HU, UY, YK mit α, β, γ bezeichnet. Dann ist

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \qquad \text{(III; 43)}$$

und γ gleich dem Winkel, den die Schattenrichtung zur wahren Sonnenzeit t mit der am wahren Mittag bildet. Diesen Winkel gilt es als Funktion der Zeit t und der Zifferblattkonstanten T, D zu bestimmen.

Im rechtwinkligen Dreieck UXY findet man nach Anhang A II (6), zweite Formel,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg} T}{\sin D}.$$

Ferner ist im rechtwinkligen Dreieck KYR nach dem gleichen Satz

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}(t - T)}{\sin D}.$$

Wegen (III; 43) ist also

$$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - 1}$$

$$= \frac{[\operatorname{ctg} T + \operatorname{ctg}(t - T)]\operatorname{cosec} D}{\operatorname{ctg} T \operatorname{ctg}(t - T)\operatorname{cosec}^2 D - 1}$$

$$= \frac{[\cos T \sin(t - T) + \sin T \cos(t - T)]\sin D}{\cos T \cos(t - T) - (1 - \cos^2 D)\sin T \sin(t - T)}$$

oder

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin D \sin t}{\cos t + \cos^2 D \sin T \sin(t - T)}. \qquad \text{(III; 44)}$$

In folgenden ausgezeichneten Lagen des Zifferblatts nimmt (III; 44) einfachere Gestalt an:

a) *Zifferblatt parallel dem Himmelsäquator*: Der Schattenstab steht auf dem Zifferblatt senkrecht, es ist T unbestimmt, $D = \frac{\pi}{2}$, somit

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg} t, \quad \gamma = t.$$

Die Einteilung der Zifferblatts ist also *gleichförmig.*

b) *Zifferblatt horizontal*: Da Q mit dem Zenit zusammenfällt, ist $T = 0$, $D = \varphi$ und daher

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg} t \sin\varphi.$$

c) *Zifferblatt vertikal*: Q ist dann ein Punkt des Horizonts mit dem Azimut A. Setzt man in den Gleichungen (I; 6) rechts $z = \frac{\pi}{2}$, so findet man sinngemäß

$$\begin{aligned} \cos D \sin T &= \sin A, \\ \cos D \cos T &= \cos A \sin \varphi, \\ \sin D &= -\cos A \cos \varphi. \end{aligned}$$

Führt man dies in (III; 44) ein, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{\sin t \cos \varphi}{\cos t \cos A + \sin t \sin A \sin \varphi}. \qquad \text{(III; 45)}$$

d) *Zifferblatt im Ersten Vertikal*: In diesem Spezialfall von (III; 45) ist $A = 0$ oder $A = \pi$ zu setzen. Man erhält

$$\operatorname{tg} \gamma = \mp \operatorname{tg} t \cos \varphi.$$

Diese Formel ist anzuwenden, wenn die Sonnenuhr an einer genau ostwestlich orientierten Gebäudewand angebracht werden soll. Das negative Zeichen gilt für eine Südwand, das positive für eine Nordwand.

Die horizontale (unter freiem Himmel aufgestellte) Sonnenuhr hat den Vorzug, daß sie ihre Dienste leistet, solange die Sonne über dem Horizont steht. Dagegen befindet sich (in nördlichen Breiten) eine vertikale Sonnenuhr an der Südwand eines Gebäudes im Schatten, wenn die Sonne (in den frühen Morgen- und den späten Abendstunden des Sommerhalbjahrs) nördlich des Ersten Vertikals steht. Vertikale Sonnenuhren sollten also immer durch solche an der gegenüberliegenden Wand des Gebäudes ergänzt werden.

Zur Ermittlung des Azimuts A der Normale der Gebäudewand, an der eine Sonnenuhr angebracht werden soll, genügt es, den Augenblick festzuhalten, in dem die Sonne durch die Ebene der Wand geht, die Beschattung der Wand also gerade beginnt oder aufhört. Der zu diesem Augenblick gehörige Stundenwinkel t der Sonne ist dann in (III; 17) einzusetzen und liefert das Azimut A' der Wand. Das Azimut der Normale (also des Zifferblattpols) ist dann durch

$$A = A' \pm \frac{\pi}{2}$$

gegeben. Man kann auch A direkt bestimmen, indem man den Beginn oder das Ende der Beschattung einer Hauswand beobachtet, die mit der Zifferblattwand einen rechten Winkel bildet.

Vertikale Sonnenuhren sind an den Erdpolen, horizontale am Äquator in der oben beschriebenen Form unbrauchbar, da der schattenwerfende Stab in die Zifferblattfläche fallen würde und somit ein Schattenwurf nicht stattfinden könnte. Man muß dann zu anderen Zifferblattformen greifen, z. B. für den Äquator zu einem waagerecht liegenden, nach oben geöffneten Halbzylinder, dessen nord-südlich gerichtete Achse der Schattenstab bildet.

IV. KAPITEL

BESTIMMUNG DER POLHÖHE DES BEOBACHTUNGSORTS BEI BEKANNTER ZEIT

31. Bestimmung der Polhöhe aus Zenitdistanzen

Wenn die Ortszeit, d. h. die Korrektion Δu der Arbeitsuhr des Beobachters bekannt ist, kann man aus der zu einer Sternzeit Θ gemessenen Zenitdistanz z eines Gestirns die Polhöhe oder geographische Breite φ des Beobachtungsorts bestimmen. Die erste Grundgleichung (II; 23) des Nautischen Dreiecks hat die Form

$$\left.\begin{aligned} a\cos\varphi + b\sin\varphi &= c \\ \text{mit}\qquad a = \cos\delta\cos t,\quad b = \sin\delta,\quad c &= \cos z\quad (t = \Theta - \alpha). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV; 1)}$$

Bestimmt man zwei Hilfsgrößen m und n aus

$$\left.\begin{aligned} \cos m \sin n &= \sin\delta, \\ \cos m \cos n &= \cos\delta\cos t, \\ \sin m &= \cos\delta\sin t, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV; 2)}$$

so kann man statt (IV; 1)

$$\cos m \cos(\varphi - n) = \cos z$$

schreiben. Daraus folgt die Tangentenformel

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi - n}{2} = \frac{\cos m - \cos z}{\cos m + \cos z} = \operatorname{tg}\frac{z + m}{2}\operatorname{tg}\frac{z - m}{2}. \qquad \text{(IV; 3)}$$

Benutzt man die Lösungsmethode nach Anhang C II, so erhält man mit

$$\alpha = \frac{\cos\delta\cos t + \cos z}{\sin\delta} \quad\text{und}\quad \beta = \frac{\cos\delta\cos t - \cos z}{\sin\delta},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 + \alpha\beta}\right) = \frac{\sin\delta \pm \sqrt{\sin^2\delta + \cos^2\delta\cos^2 t - \cos^2 z}}{\cos\delta\cos t + \cos z}$$

oder, wenn man unter der Wurzel $\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta$ setzt,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\delta \pm \sqrt{\sin^2 z - \cos^2\delta\sin^2 t}}{\cos\delta\cos t + \cos z}. \qquad \text{(IV; 4)}$$

Sowohl (IV; 3) als auch (IV; 4) lassen erkennen, daß die Rechnung zwei Lösungen φ_1, φ_2 für die unbekannte Polhöhe liefert, von denen natürlich nur eine den örtlichen Bedingungen entspricht. Nach (IV; 3) hängen sie durch die Beziehung

$$\varphi_1 - n = -(\varphi_2 - n) \quad \text{oder} \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = n$$

miteinander zusammen. Abb. 30 lehrt die geometrische Bedeutung der doppelten Lösung sowie der Hilfsgrößen m und n. Das Zenit Z, dessen Deklination ja gleich φ ist, liegt 1. auf dem Meridian, 2. auf jenem Kreise, dessen Mittelpunkt der im Stundenwinkel t beobachtete Stern S und dessen Halbmesser gleich der beobachteten Zenitdistanz z ist. Diese beiden Örter haben zwei Schnittpunkte Z_1 und Z_2, deren Deklinationen die beiden Lösungen φ_1, φ_2 ergeben. Fällt man von S auf den Meridian das Lot, so ist die Deklination des Fußpunktes Q gleich n, der Abstand $SQ = m$, denn es gelten in dem rechtwinkligen Dreieck PSQ die Formeln (IV; 2) nach Anhang A II (4).

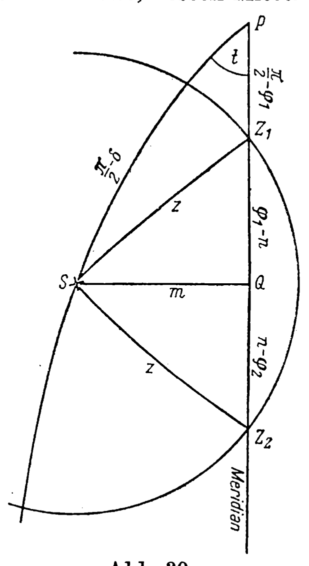


Abb. 30: Polhöhenbestimmung aus Zenitdistanzen. Zwei Lösungen

Die günstigsten Beobachtungsbedingungen ergeben sich, wenn S im Meridian steht, da dann der Kreis $Z_1 Z_2$ den Meridian rechtwinklig schneidet. Über die richtige der beiden Lösungen kann dann kein Zweifel herrschen, da das Zenit für die eine nördlich, für die andere südlich des Sterns liegt. Steht dagegen S im Ersten Vertikal, so berührt der Kreis den Meridian in Z, und eine sichere Bestimmung der Zenitlage ist unmöglich. Differenziert man die erste Gleichung (II; 23), indem man t und δ als konstant ansieht, so erhält man

$$(\sin\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \sin\delta)\, d\varphi = \sin z\, dz$$

oder, wenn man die Klammer links durch die zweite Gleichung (II; 23) umwandelt, nach Division durch $\sin z \cos A$

$$d\varphi = \frac{dz}{\cos A}. \qquad \text{(IV; 5)}$$

Es zeigt sich also auch auf diese Weise, daß die Polhöhenbestimmung aus Zenitdistanzen im Meridian am genauesten, im Ersten Vertikal dagegen unmöglich ist.

32. Zirkummeridianzenitdistanzen

Während des Meridiandurchgangs nehmen die Zenitdistanzen der Gestirne die Werte (II; 13) an, d. h., es ist in *oberer Kulmination*

$$z = \pm(\varphi - \delta),$$

je nachdem der Stern den Meridian südlich oder nördlich des Zenits überschreitet. In *unterer Kulmination* ist hingegen

$$z = \pi \pm (\varphi + \delta),$$

wobei, vorausgesetzt, daß die untere Kulmination über dem Horizont stattfindet, das obere Zeichen für die nördliche, das untere für die südliche Halbkugel der Erde gilt.

Bei bekanntem δ kann also auf Grund dieser Formeln die Polhöhe aus gemessenen Meridianzenitdistanzen sehr einfach bestimmt werden. Da aber im Meridian nach (II; 30) $\frac{dz}{dt} = 0$, ändern sich die Zenitdistanzen vor und nach der Kulmination nur sehr wenig. Es wird daher, wenn Zenitdistanzen in der Nähe des Meridians gemessen werden (*Zirkummeridianzenitdistanzen*), nur geringer Korrektionen bedürfen, um sie auf Meridianzenitdistanzen zurückzuführen.

Sei in der Nähe der oberen Kulmination die Zenitdistanz eines Gestirns

$$z = \pm (\varphi - \delta) + x, \qquad \text{(IV; 6)}$$

so ist x eine kleine Größe, die *positiv* sein muß, da ja z im Meridian ein Minimum hat. Setzt man (IV; 6) in (IV; 1) ein, so erhält man

$$\cos(\varphi - \delta \pm x) = \cos\varphi\cos\delta\cos t + \sin\varphi\sin\delta =$$
$$= \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2}.$$

Das ist eine Gleichung von der Form

$$a\cos x + b\sin x = c\,, \qquad \text{(IV; 7)}$$

mit $a = \cos(\varphi - \delta)$, $b = \mp\sin(\varphi - \delta)$,

$$c = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2}.$$

Setzt man also

$$\alpha = \frac{a+c}{b} = \mp 2\,\frac{\cos(\varphi-\delta) - \cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2}}{\sin(\varphi-\delta)},$$

$$\beta = \frac{a-c}{b} = \mp 2\,\frac{\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t}{2}}{\sin(\varphi-\delta)},$$

so erhält man nach Anhang C IV (28) die Reihenentwicklung

$$x = -\beta + \frac{1}{12}(\beta^3 + 3\beta^2\alpha) - \frac{1}{80}(\beta^5 + 5\beta^4\alpha + 10\beta^3\alpha^2) + \cdots. \qquad \text{(IV; 8)}$$

Nun enthält α Glieder der nullten und zweiten Ordnung in der kleinen Größe t, während β von zweiter Ordnung ist. Will man die Reihe bis zur vierten Ordnung durchführen, also Glieder von sechster und höherer Ordnung vernachlässigen, so genügt es,

$$x = -\beta + \frac{1}{4}\beta^2 \alpha$$

zu setzen und im letzten Gliede für α nur das von t unabhängige Glied zu verwenden. Es ist dann, wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}, \quad m = 2\sin^2\frac{t}{2}, \quad n = 2\sin^4\frac{t}{2} \\ x &= \pm\, lm \mp l^2 n \operatorname{ctg}(\varphi-\delta). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV; 9)}$$

setzt,

Es ergibt sich also aus (IV; 6) und (IV; 9) $\varphi = \delta \pm (z - x)$ oder

$$\varphi = \delta \pm z - lm + l^2 n \operatorname{ctg}(\varphi - \delta) \qquad \text{(IV; 10)}$$

für *obere Kulmination* (oberes Zeichen für Kulmination südlich des Zenits).

In der Nähe der *unteren Kulmination* gilt anstatt (IV; 6)

$$z = \pi \mp (\varphi + \delta) - x, \qquad \text{(IV; 11)}$$

wobei wiederum x klein und positiv ist, da ja in der unteren Kulmination die Zenitdistanz ihr Maximum hat. Das obere Zeichen gilt für nördliche, das untere für südliche Breiten. Setzt man dies in (IV; 1) ein, so ergibt sich

$$-\cos(\varphi + \delta \pm x) = 2\cos\varphi\cos\delta\cos^2\frac{t}{2} - \cos(\varphi+\delta),$$

wobei $t \sim \pi$, also $\cos^2\frac{t}{2}$ sehr klein ist. Man erhält wieder eine Gleichung von der Form (IV; 7) mit

$$a = -\cos(\varphi+\delta), \quad b = \pm\sin(\varphi+\delta), \quad c = 2\cos\varphi\cos\delta\cos^2\frac{t}{2} - \cos(\varphi+\delta)$$

und somit x aus der Reihenentwicklung (IV; 8) mit

$$\alpha = \mp 2\frac{\cos(\varphi+\delta) - \cos\varphi\cos\delta\cos^2\frac{t}{2}}{\sin(\varphi+\delta)},$$

$$\beta = \mp 2\frac{\cos\varphi\cos\delta\cos^2\frac{t}{2}}{\sin(\varphi+\delta)}$$

oder, wenn man sich wieder mit den Gliedern bis zur vierten Ordnung begnügt,

$$x = \pm\, l'm' \mp l'^2 n' \operatorname{ctg}(\varphi+\delta),$$

mit $$l' = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi+\delta)}, \quad m' = 2\cos^2\frac{t}{2}, \quad n' = 2\cos^4\frac{t}{2}.$$

Hieraus und aus (IV; 11) findet man also mit Hilfe von Zirkummeridianzenitdistanzen in *unterer Kulmination*

$$\varphi = \pm (\pi - z) - \delta \mp x$$

oder

$$\varphi = \pm (\pi - z) - \delta - l'm' + l'^2 n' \operatorname{ctg} (\varphi + \delta), \qquad \text{(IV; 12)}$$

wobei das obere Zeichen für nördliche, das untere für südliche Breiten gilt.

Die Formeln (IV; 9) zeigen, daß die Konvergenz der Reihenentwicklung schlecht wird, wenn $\varphi - \delta$ klein ist, also der Stern in der Nähe des Zenits kulminiert. Schließt man zenitnahe Gestirne aus, so ist die genäherte Formel (IV; 10) für Stundenwinkel bis zu 1 — $1^1/_2$ Stunden ausreichend; beschränkt man sich auf $|t| < 30^m$, so genügt in der Regel schon das erste Glied. Man findet die Größen m, n (aus denen m', n' durch Vertauschen von t mit $t - 12^h$ hervorgehen) in den meisten Tafelwerken zur Geographischen Ortsbestimmung oder Nautik als Funktionen des in Zeitmaß ausgedrückten Stundenwinkels tabuliert, und zwar in Bogensekunden verwandelt, so daß sie in den Formeln (IV; 10), (IV; 12) unmittelbar verwendet werden können. Die Faktoren l, l' enthalten die unbekannte Polhöhe; es genügt aber, sie mit genäherten Werten von φ zu berechnen, wie sie in Form der unkorrigierten Polhöhe $\delta \pm z$ bzw. $\pm (\pi - z) - \delta$ immer zur Verfügung stehen. Der Fehler, den diese Annahme in l, l' hervorruft, wird durch die kleinen Faktoren $m, n, \ldots$ meist unter die Schwelle der Rechnungsgenauigkeit herabgedrückt — wenn nicht, so wird die Wiederholung der Rechnung mit dem aus der ersten Hypothese gewonnenen φ zum Ziele führen.

Zur Erhöhung der Genauigkeit ist es zweckmäßig, nicht eine einzige Zenitdistanz des Gestirns zu messen, sondern eine ganze Reihe von Messungen in der Nähe der Kulmination auszuführen. Die oben abgeleiteten Formeln sind dann sehr bequem, da die Größen l, $l^2 \operatorname{ctg} (\varphi - \delta)$ usw. für alle diese Beobachtungen konstant sind.

Ist die Deklination des Gestirns veränderlich (Messung von Zirkummeridianhöhen der *Sonne* auf See mit dem Sextanten!), so muß man jede einzelne Beobachtung mit dem ihr zugehörigen δ reduzieren. Bei einer größeren Zahl von Sonnenbeobachtungen in der Nähe des wahren Mittags kann man sich diese etwas umständliche Arbeit erleichtern, indem man t nicht vom Meridian, sondern vom Stundenwinkel der größten Sonnenhöhe an rechnet, mit anderen Worten, indem man die *Mittagsverbesserung* nach (II; 59) berücksichtigt. Man setzt also statt t die Größe

$$t' = t - [8{,}02575] (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \delta) \Delta\delta''$$

und kann dann die ganze Rechnung mit derjenigen Deklination der Sonne durchführen, die dem Zeitpunkt ihrer größten Höhe entspricht.

Eine weitere Vereinfachung der Reduktion von serienweise beobachteten Zirkummeridianzenitdistanzen besteht darin, daß man nicht die einzelnen Zenitdistanzen, sondern ihr arithmetisches Mittel verwendet. Man hat aber dann zu beachten, daß dieser Mittelwert im allgemeinen nicht dem Mittelwert der

Beobachtungszeiten bzw. Stundenwinkel entspricht. Das wäre nur dann der Fall, wenn die Zenitdistanz sich mit der Zeit linear änderte, eine Bedingung, die aber gerade in der Umgebung der Kulmination nicht erfüllt ist. Über das Verfahren, das Mittel der beobachteten Größen auf das Mittel der beobachteten Zeiten zu reduzieren, wird in Anhang E berichtet.

33. Polhöhenbestimmung aus Zenitdistanzen polnaher Sterne

Zirkumpolarsterne kann man in beiden Kulminationen beobachten, wenn die Zeiten der oberen und der unteren Kulmination beide in die Dunkelheit fallen, oder wenn der Stern so hell ist, daß er im Fernrohr des Beobachtungsinstruments auch am Tage sichtbar ist. Die Zenitdistanzen z_o und z_u sind dann, nachdem sie von der Refraktion befreit sind,

$$z_o = \mp (\varphi - \delta), \quad z_u = \pi \mp (\varphi + \delta),$$

wobei das obere Zeichen für nördliche, das untere für südliche Breiten gilt. Hierbei ist angenommen, daß beide Kulminationen auf der gleichen Seite vom Zenit erfolgen, andernfalls erhält z_o das umgekehrte Vorzeichen.

Bildet man das arithmetische Mittel der beiden Zenitdistanzen, so ergibt sich

$$\frac{z_o + z_u}{2} = \frac{\pi}{2} \mp \varphi \quad \text{oder} \quad \varphi = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{z_o + z_u}{2}\right).$$

Diese Methode der Polhöhenbestimmung hat den Vorteil, daß die Deklination des Gestirns (sofern sie konstant ist) nicht bekannt zu sein braucht; der Nachteil besteht darin, daß die beiden Beobachtungen zwölf Stunden auseinanderliegen, und sich in dieser Zeit die meteorologischen Bedingungen (Refraktion!) und die Instrumentalkonstanten geändert haben können.

Befindet sich der Stern sehr nahe am Pol (Polarstern!), so wird er sich im Azimut während seiner täglichen Bewegung niemals weit vom Meridian entfernen, falls es sich nicht gerade um Beobachtungsorte in der Nähe der Erdpole handelt. Die Beobachtungsbedingungen sind also gemäß (IV; 5) jederzeit günstig, da in allen Stundenwinkeln $|\cos A| \sim 1$ ist. Die Bewegung des Polarsterns ist so langsam, daß seine Einstellung auf den Horizontalfaden des Fernrohrs jederzeit sehr genau vorgenommen werden kann.

Da Messungen der Zenitdistanz des Polarsterns häufig zu exakten Bestimmungen der Polhöhe herangezogen werden, ist es interessant festzustellen, in welchem Betrage nicht nur die Fehler der gemessenen Zenitdistanz, sondern auch die Unsicherheit der Beobachtungszeit Θ und des Gestirnsorts (α, δ) in das Ergebnis eingehen. Differenziert man die Grundgleichung (II; 23), erste Formel, nach allen diesen Größen, so erhält man

$$-\sin z\, dz = (\cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos t)\, d\varphi +$$

$$+ (\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t)\, d\delta - \cos\varphi \cos\delta \sin t\, dt,$$

$$dt = d\Theta - d\alpha.$$

Setzt man hierin die aus dem Nautischen Dreieck folgenden Formeln

$$-\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cos t = \sin z\cos A\,,$$
$$\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t = \sin z\cos p\,,$$
$$\cos\varphi\sin t = \sin z\sin p$$

ein, so ergibt sich, nachdem man den gemeinsamen Faktor $\sin z$ herausdividiert hat,

$$\cos A\,d\varphi = dz + \cos p\,d\delta - \cos\delta\sin p\,(d\Theta - d\alpha).$$

Für den Polarstern kann man links (außer für sehr hohe nördliche Breiten) $\cos A \sim -1$ setzen. Der Fehler der Deklination hat also im Meridian ($\cos p = \pm 1$) den größten Einfluß, bleibt aber in der größten Digression wirkungslos. Der Uhrfehler $d\Theta$, der mit dem Fehler der Rektaszension vereinigt bleibt, ist wegen des Faktors $\sin p$ in der größten Digression am wirksamsten, doch wird der Betrag dieses Einflusses durch den Faktor $\cos\delta$ auf etwa den 60. Teil herabgedrückt.

Die Poldistanz $\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2} - \delta$ des Polarsterns ist ein kleiner Winkel (gegenwärtig ist $\tilde{\omega} < 1°$); man kann diese Tatsache benutzen, um die Polhöhe des Beobachtungsorts in eine nach Potenzen von $\tilde{\omega}$ fortschreitende Reihe zu entwickeln, deren Koeffizienten von der gemessenen Zeitdistanz z und dem Stundenwinkel t des Polarsterns abhängen. Man setze

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (z + x)\,,$$

wobei x offenbar eine kleine Größe von der Ordnung $\tilde{\omega}$ ist. Die erste Gleichung (II; 23) nimmt dann die Form

$$\cos z = \cos\tilde{\omega}\cos(z + x) + \sin\tilde{\omega}\sin(z + x)\cos t$$

an oder, wenn man die Ausdrücke $\sin(z + x)$, $\cos(z + x)$ auflöst und ordnet,

$$a\cos x + b\sin x = c\,,$$

mit

$$a = \sin z\sin\tilde{\omega}\cos t + \cos z\cos\tilde{\omega}\,,$$
$$b = \cos z\sin\tilde{\omega}\cos t - \sin z\cos\tilde{\omega}\,,$$
$$c = \cos z\,.$$

Nach Anhang C IV (28) führt dies also auf die Entwicklung

$$x = -\beta + \frac{1}{12}(\beta^3 + 3\beta^2\alpha) - \frac{1}{80}(\beta^5 + 5\beta^4\alpha + 10\beta^3\alpha^2) + \\ + \frac{1}{448}(\beta^7 + 7\beta^6\alpha + 21\beta^5\alpha^2 + 35\beta^4\alpha^3) - \cdots, \quad \text{(IV; 13)}$$

mit
$$\alpha = \frac{\sin z \sin \tilde{\omega} \cos t + \cos z (1 + \cos \tilde{\omega})}{\cos z \sin \tilde{\omega} \cos t - \sin z \cos \tilde{\omega}},$$
$$\beta = \frac{\sin z \sin \tilde{\omega} \cos t - \cos z (1 - \cos \tilde{\omega})}{\cos z \sin \tilde{\omega} \cos t - \sin z \cos \tilde{\omega}}.$$

Man kürze diese Brüche durch $\sin z \cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}$. Da
$$\frac{\cos \tilde{\omega}}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}, \quad \frac{\sin \tilde{\omega}}{\cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\tilde{\omega}}{2},$$
$$\frac{1 + \cos \tilde{\omega}}{\cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}} = 2, \quad \frac{1 - \cos \tilde{\omega}}{\cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}} = 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\tilde{\omega}}{2},$$

so folgt, wenn man zur Abkürzung
$$\operatorname{tg} \frac{\tilde{\omega}}{2} = y, \quad \operatorname{ctg} z = p, \quad \operatorname{tg} z \cos t = m, \quad \operatorname{ctg} z \cos t = n$$

setzt,
$$\alpha = -2p \frac{1 + my}{1 - y^2 - 2ny} = -\frac{2p}{1 - y^2} \cdot \frac{1 + my}{1 - \frac{2y}{1 - y^2} n},$$
$$\beta = -2py \frac{m - y}{1 - y^2 - 2ny} = -\frac{2yp}{1 - y^2} \cdot \frac{m - y}{1 - \frac{2y}{1 - y^2} n}$$

oder, da
$$y = \operatorname{tg} \frac{\tilde{\omega}}{2}, \quad \frac{2y}{1 - y^2} = \operatorname{tg} \tilde{\omega}, \quad \frac{1}{1 - y^2} = \cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2} \sec \tilde{\omega},$$
$$\alpha = -2p \cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2} \sec \tilde{\omega} \left(1 + m \operatorname{tg} \frac{\tilde{\omega}}{2}\right) (1 + n \operatorname{tg} \tilde{\omega} + n^2 \operatorname{tg}^2 \tilde{\omega} + \cdots),$$
$$\beta = -p \operatorname{tg} \tilde{\omega} \left(m - \operatorname{tg} \frac{\tilde{\omega}}{2}\right) (1 + n \operatorname{tg} \tilde{\omega} + n^2 \operatorname{tg}^2 \tilde{\omega} + \cdots).$$

Führt man nun die Reihenentwicklungen
$$\cos \frac{\tilde{\omega}}{2} = 1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{8} + \cdots, \sec \tilde{\omega} = 1 + \frac{\tilde{\omega}^2}{2} + \cdots,$$
$$\operatorname{tg} \tilde{\omega} = \tilde{\omega} + \frac{\tilde{\omega}^3}{3} + \cdots, \quad \operatorname{tg} \frac{\tilde{\omega}}{2} = \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{\tilde{\omega}^3}{24} + \cdots$$

ein, so gelingt es leicht, α, β und damit auch x in eine nach Potenzen von $\tilde{\omega}$ fortschreitende Reihe zu entwickeln. Beschränkt man sich auf Glieder bis zur vierten Ordnung, was auch für genaueste Rechnung mehr als ausreichend ist, und berücksichtigt man, daß α von der nullten, β von der ersten Ordnung in $\tilde{\omega}$ ist, so bleiben von der Reihe (IV; 13) die Glieder

$$x = -\beta + \frac{1}{4}\beta^2\alpha + \frac{1}{12}\beta^3 - \frac{1}{8}\beta^3\alpha^2 - \frac{1}{16}\beta^4\alpha + \frac{5}{64}\beta^4\alpha^3 \cdots$$

zu berechnen übrig, wobei β bis zur vierten, α bis höchstens zur zweiten Ordnung zu entwickeln ist. Eine elementare, wenn auch etwas umständliche Rechnung ergibt sodann die auch in den Lehrbüchern (z. B. in der „Sphärischen Astronomie“ von BRÜNNOW) angegebene Entwicklung

$$x = \frac{\pi}{2} - \varphi - z = \tilde{\omega} \cos t - \frac{\tilde{\omega}^2}{2} \sin^2 t \operatorname{ctg} z + \frac{\tilde{\omega}^3}{3} \cos t \sin^2 t -$$

$$- \frac{\tilde{\omega}^4}{24} \sin^2 t \operatorname{ctg} z \,(5 \sin^2 t - 4 \cos^2 t + 3 \sin^2 t \operatorname{ctg}^2 z) + \cdots$$

und somit

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - z - \tilde{\omega} \left[\cos t - \frac{\tilde{\omega}}{2} \sin^2 t \operatorname{ctg} z + \cdots\right], \qquad \text{(IV; 14)}$$

wobei $\tilde{\omega}$ vor der Klammer in Winkelmaß, in der Klammer aber in Bogenmaß zu verstehen ist. In der Praxis wird man selten mehr als die in (IV; 14) aufgeführten Glieder benötigen. Die erste Näherung

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - z - \tilde{\omega} \cos t$$

liefert die Polhöhe schon auf die Bogenminute genau, während die Berücksichtigung des nächsten Gliedes bereits Bruchteile der Bogensekunde garantiert.

Eine sehr einfache geschlossene Lösung desselben Problems ergibt sich auf folgende Weise: In Abb. 31 sei S der Polarstern und SQ der auf dem Meridian PZ senkrecht stehende Bogen, der das Nautische Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Man setze wieder die Poldistanz des Polarsterns $PS = \frac{\pi}{2} - \delta = \tilde{\omega}$, ferner das Komplement der geographischen Breite $PZ = \frac{\pi}{2} - \varphi = \psi$ und die beiden Meridianabschnitte $PQ = p$ und $QZ = q$. Dann ist (vgl. Anhang A II (6), zweite Formel)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} p &= \operatorname{tg} \tilde{\omega} \cos t\,, \\ \operatorname{tg} q &= \operatorname{tg} z \cos (\pi - A)\,, \\ \psi &= p + q\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV; 15)}$$

Diese Gleichungen enthalten die vollständige Lösung, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, nachdem man den immer sehr kleinen Winkel $\pi - A$ aus PZS nach dem Sinussatz

$$\sin(\pi - A) = \frac{\sin t}{\sin z} \sin\tilde{\omega}$$

bestimmt hat.

Eine dritte Lösung, die wieder auf Reihenentwicklungen beruht, wurde von P. Harzer gefunden. Sie ist bisher nicht veröffentlicht worden, verdient es aber, ihrer mathematischen Eleganz wegen, der Vergessenheit entrissen zu werden. Im Dreieck PZS (Abb. 31) gelten die Grundgleichungen

$$\sin z \sin(\pi - A) = \sin\tilde{\omega} \sin t\,,$$

$$\sin z \cos(\pi - A) = \cos\tilde{\omega} \sin\psi - \sin\tilde{\omega} \cos\psi \cos t\,.$$

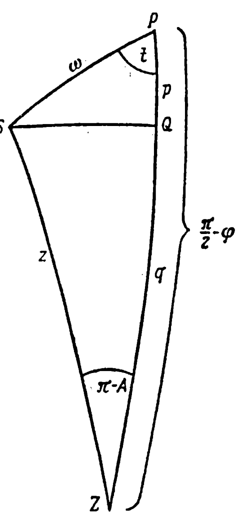


Abb. 31: Polhöhenbestimmung aus Zenitdistanzen des Polarsterns

Multipliziert man die erste mit der imaginären Einheit i und addiert sie zur zweiten, und setzt man

$$\cos(\pi - A) + i \sin(\pi - A) = e^{i(\pi - A)},$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad i \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2},$$

so ergibt sich

$$\sin z\, e^{i(\pi - A)} = \cos\tilde{\omega} \sin\psi - \frac{1}{2} \sin\tilde{\omega} \cos\psi\, (e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{2} \sin\tilde{\omega}\, (e^{it} - e^{-it})$$

oder, wenn man die Glieder mit e^{it}, e^{-it} sammelt und die Identitäten

$$\frac{1 + \cos\psi}{2} = \cos^2\frac{\psi}{2}, \quad \frac{1 - \cos\psi}{2} = \sin^2\frac{\psi}{2}$$

benutzt,

$$\sin z\, e^{i(\pi - A)} = \cos\tilde{\omega} \sin\psi + \sin\tilde{\omega} \left(e^{it} \sin^2\frac{\psi}{2} - e^{-it} \cos^2\frac{\psi}{2}\right)$$

$$= \sin\psi \left(\cos^2\frac{\tilde{\omega}}{2} - \sin^2\frac{\tilde{\omega}}{2}\right) + 2 \sin\frac{\tilde{\omega}}{2} \cos\frac{\tilde{\omega}}{2} \left(e^{it} \sin^2\frac{\psi}{2} - e^{-it} \cos^2\frac{\psi}{2}\right)$$

$$= \sin\psi \cos^2\frac{\tilde{\omega}}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\tilde{\omega}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\tilde{\omega}}{2} \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} e^{it} - \operatorname{tg}\frac{\tilde{\omega}}{2} \operatorname{ctg}\frac{\psi}{2} e^{-it}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$f = \operatorname{tg}\frac{\tilde{\omega}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}, \qquad g = \operatorname{tg}\frac{\tilde{\omega}}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2},$$

so kann man sie auch in der Form

$$\sin z e^{i(\pi - A)} = \sin\psi\cos^2\frac{\tilde{\omega}}{2}\,(1 - f e^{-it})\,(1 + g e^{it})$$

schreiben. Durch Logarithmieren ergibt sich

$$\ln\sin z + i(\pi - A) = \ln\left(\sin\psi\cos^2\frac{\tilde{\omega}}{2}\right) + \ln(1 - f e^{-it}) + \ln(1 + g e^{it}).$$

Da f und g für nicht zu hohe Breiten klein von der Ordnung $\tilde{\omega}$ sind, lassen sich die beiden letzten Logarithmen rechts in rasch konvergierende Reihen verwandeln, und man erhält

$$\ln\sin z + i(\pi - A) = \ln\left(\sin\psi\cos^2\frac{\tilde{\omega}}{2}\right) - f e^{-it} - \frac{1}{2} f^2 e^{-2it} - \frac{1}{3} f^3 e^{-3it} - \cdots$$
$$+ g e^{it} - \frac{1}{2} g^2 e^{2it} + \frac{1}{3} g^3 e^{3it} - \cdots$$

oder, wenn man wieder $e^{\pm it} = \cos t \pm i\sin t$ einführt,

$$\ln\sin z + i(\pi - A) = \ln\left(\sin\psi\cos^2\frac{\tilde{\omega}}{2}\right) - (f - g)\cos t - \frac{1}{2}(f^2 + g^2)\cos 2t - \cdots$$
$$+ i\left[(f + g)\sin t + \frac{1}{2}(f^2 - g^2)\sin 2t + \cdots\right].$$

Die Gleichsetzung der reellen und imaginären Teile beider Seiten führt auf zwei Beziehungen:

$$\ln\sin\psi = \ln\sin z - 2\ln\cos\frac{\tilde{\omega}}{2} + (f - g)\cos t + \frac{1}{2}(f^2 + g^2)\cos 2t + \cdots, \tag{IV; 16}$$

$$\pi - A = (f + g)\sin t + \frac{1}{2}(f^2 - g^2)\sin 2t + \frac{1}{3}(f^3 + g^3)\sin 3t + \cdots. \tag{IV; 17}$$

Formel (IV; 16) ergibt die Polhöhe $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ aus dem Cosinus, sie ist also für kleine Breiten ungeeignet. Das ist aber kein großer Nachteil, da in diesen Gegenden der Polarstern in geringer Höhe über dem Horizont steht und Messungen seiner Zenitdistanz ungenau sind (Refraktion!). Als Nebenprodukt erhält man A aus (IV; 17). Bei (IV; 16) hat man darauf zu achten, daß die Cosinusreihe rechts mit dem Modul $M = 0{,}43429$ zu multiplizieren ist, wenn man Briggsche Logarithmen verwendet. Formel (IV; 17)

liefert $\pi - A$ in Bogenmaß, ist also mit 206265 zu multiplizieren, wenn man das Ergebnis in Bogensekunden haben will.

Ein Nachteil dieser hübschen Methode besteht darin, daß die Hilfsgrößen f und g die unbekannte Polhöhe enthalten. Da sie aber mit dem kleinen Faktor $\operatorname{tg}\frac{\tilde{\omega}}{2}$ behaftet sind, ist es ausreichend, für φ den immer verfügbaren Näherungswert $z + \tilde{\omega}\cos t$ zu benutzen.

34. Polhöhenbestimmung durch Beobachtung zweier Sterne in gleicher Zenitdistanz. Methode von HORREBOW-TALCOTT

In den Abschnitten 22 und 23 wurde gezeigt, wie man bei bekannter Polhöhe die Ortszeit aus korrespondierenden Zenitdistanzen zweier Sterne bestimmen kann. Diese Methoden zeichnen sich durch große Genauigkeit aus, da sie von den Fehlern der Kreisablesung und der Refraktion frei sind. Ganz entsprechende Methoden führen auch zur Bestimmung der Polhöhe bei bekanntem Uhrstand, wenn man zwei Sterne bei ihrem Durchgang durch den gleichen Almukantarat beobachtet.

Angenommen, zwei Sterne (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) haben zu den kurz aufeinanderfolgenden Sternzeiten Θ_1, Θ_2 die Stundenwinkel $t_1 = \Theta_1 - \alpha_1$, $t_2 = \Theta_2 - \alpha_2$ und die gemeinsame Zenitdistanz z. Dann ist nach (II; 23)

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi\cos\delta_1\cos t_1,$$
$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi\cos\delta_2\cos t_2.$$

Durch Gleichsetzung der rechten Seiten folgt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\delta_1\cos t_1 - \cos\delta_2\cos t_2}{\sin\delta_2 - \sin\delta_1}. \qquad \text{(IV; 18)}$$

Setzt man wie in (III; 13)

$$t_1 = t - \lambda,\ t_2 = t + \lambda;\ \delta_1 = \delta - \varepsilon,\ \delta_2 = \delta + \varepsilon,$$

so ergibt sich aus (IV; 18) nach kurzer Rechnung die etwas bequemere Formel

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\delta\cos t\cos\lambda + \operatorname{ctg}\varepsilon\sin t\sin\lambda.$$

Zur Ableitung der günstigsten Beobachtungsbedingungen benutzen wir die Differentialformel (IV; 5), nach der für fehlerfreie Sternörter und Zeiten

$$d\varphi\cos A_1 = dz_1 = dz + df_1,$$
$$d\varphi\cos A_2 = dz_2 = dz + df_2$$

gilt, wenn dz der bei dieser Methode zu eliminierende Fehler der Zenitdistanz ist und df_1, df_2 die Einstellungsfehler auf den Horizontalfaden des Fernrohrs bedeuten. Nach Subtraktion beider Gleichungen ergibt sich

$$d\varphi = \frac{df_1 - df_2}{\cos A_1 - \cos A_2}.$$

Der Einfluß der Beobachtungsfehler erreicht also sein Minimum, wenn der Nenner möglichst groß, also $A_1 = 0$, $A_2 = \pi$ ist. Die beiden Sterne sind daher nach Möglichkeit im Meridian nördlich und südlich des Zenits zu beobachten. Ist ε der mittlere Einstellungsfehler, so ergibt sich in diesem günstigsten Falle als mittlerer Fehler der Polhöhe $\varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ (Anhang D IV).

Es leuchtet ein, daß es nahezu unmöglich ist, Sternpaare zu finden, die für einen gegebenen Beobachtungsort genau in der gleichen Zenitdistanz nördlich und südlich des Zenits kulminieren. Man wird also in der Praxis zufrieden sein, wenn bei fester Höheneinstellung des Fernrohrs beide Sterne während ihrer Kulmination im Gesichtsfeld erscheinen. Die Unterschiede der Meridianzenitdistanzen lassen sich dann mit Hilfe eines beweglichen horizontalen Mikrometerfadens, oder wenn nur ein fester Faden vorhanden ist, mit Feinbewegung und Libelle bestimmen. Sind also die beiden Meridianzenitdistanzen

$$z_1 = \varphi - \delta_1 \qquad \text{(Kulmination südlich des Zenits)},$$

$$z_2 = \delta_2 - \varphi \qquad \text{(Kulmination nördlich des Zenits)},$$

so erhält man durch Subtraktion

$$\varphi = \frac{z_1 - z_2}{2} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$$

wobei die Differenz der Zenitdistanzen mittels Mikrometermessung oder Libelle oder durch beides bestimmt wird. Dieses an Genauigkeit und Einfachheit unübertreffliche Verfahren ist als Methode von Horrebow und Talcott bekannt. Man benutzt, obwohl die Größenordnung der Zenitdistanz an sich gleichgültig ist, zweckmäßig zenitnahe Sterne, um Fehlerquellen, die von Anomalien der Refraktion herrühren könnten, nach Möglichkeit auszuschalten.

Die Horrebow-Talcott-Methode hat zur Erforschung der äußerst geringen zeitlichen Schwankungen der Polhöhe gedient, von denen im Abschnitt 5 die Rede war.

35. Bestimmung der Polhöhe aus Azimutmessungen

Um die Polhöhe bei bekannter Ortszeit aus einer einzigen Azimutmessung eines Gestirns zu bestimmen, benutzen wir die Gleichung (III; 18) in der Form

$$\cos\varphi \sin\delta \sin A - \sin\varphi \cos\delta \sin A \cos t = -\cos\delta \cos A \sin t\,. \qquad \text{(IV; 19)}$$

Sie hat die Gestalt $a\cos\varphi + b\sin\varphi = c$ mit

$$a = \sin\delta \sin A, \quad b = -\cos\delta \sin A \cos t, \quad c = -\cos\delta \cos A \sin t$$

und führt somit nach Anhang C II auf die Lösung

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 + \alpha\beta}\right)$$

mit

$$\alpha = \frac{\cos\delta\cos A\sin t - \sin\delta\sin A}{\cos\delta\sin A\cos t},$$

$$\beta = -\frac{\cos\delta\cos A\sin t + \sin\delta\sin A}{\cos\delta\sin A\cos t},$$

d. h. auf

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\delta\sin A\cos t \pm \sqrt{\cos^2\delta\sin^2 A\cos^2 t - (\cos^2\delta\cos^2 A\sin^2 t - \sin^2\delta\sin^2 A)}}{\cos\delta\cos A\sin t - \sin\delta\sin A}$$

oder, wenn man im ersten Gliede unter der Wurzel $\cos^2\delta = 1 - \sin^2\delta$ und $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ setzt,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\delta\sin A\cos t \pm \sqrt{\sin^2 A - \sin^2 t\cos^2\delta}}{\cos\delta\cos A\sin t - \sin\delta\sin A}. \quad \text{(IV; 20)}$$

Dieser rechnerisch umständlichen algebraischen Lösung ist folgende geometrische Methode überlegen: Man fälle (Abb. 32) vom Sternort S das Lot $SQ = m$ auf den Meridian PZ. Der Fußpunkt Q habe die Poldistanz n. Dann ist $ZQ = \varphi + n - \frac{\pi}{2}$ und im rechtwinkligen Dreieck SQZ bestehen die Beziehungen [Anhang A II (4)]

$$\left.\begin{aligned} \sin z\sin A &= \sin m, \\ \sin z\cos A &= -\cos m\cos(\varphi + n). \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV; 21)}$$

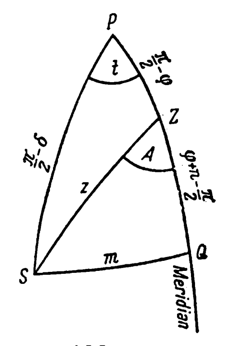


Abb. 32: Polhöhenbestimmung aus Azimuten

Hieraus folgt

$$\cos(\varphi + n) = -\operatorname{ctg} A\operatorname{tg} m$$

und somit die Tangentenformel

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi + n}{2} = \frac{1 - \cos(\varphi + n)}{1 + \cos(\varphi + n)} = \frac{\sin(A + m)}{\sin(A - m)}. \quad \text{(IV; 22)}$$

Die Hilfsgrößen m, n folgen aus den Beziehungen [Anhang A II (4)] des rechtwinkligen Dreiecks PQS:

$$\left.\begin{aligned} \cos m\cos n &= \sin\delta, \\ \cos m\sin n &= \cos\delta\cos t, \\ \sin m &= \cos\delta\sin t. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV; 23)}$$

Die Formeln (IV; 20) und (IV; 22) zeigen, daß es zwei Lösungen φ gibt, die den Gleichungen genügen. Ihre geometrische Bedeutung geht aus Abb. 33 hervor. Die Gleichungen (IV; 23) gelten nämlich auch für das Dreieck SQZ', das dem Dreieck SQZ kongruent ist. Z' hat die Poldistanz $\varphi + 2n - \frac{\pi}{2}$. Da nun aber, wenn wir die zweite Lösung mit φ' bezeichnen, wegen (IV; 22) $\varphi' + n = -(\varphi + n)$, also $\varphi' = -(\varphi + 2n)$ ist, so hat das Zenit Z'' der zweiten Lösung die Poldistanz $\frac{\pi}{2} + \varphi + 2n$, so daß Z' und Z'' sich um $\pi = 180°$ voneinander unterscheiden. Z' ist also das *Nadir* eines Ortes auf der geographischen Breite φ'. Ist demnach Z das Zenit der ersten Lösung, so stellt Z' das Nadir der zweiten Lösung dar.

Abb. 33: Polhöhenbestimmung aus Azimuten. Zweite Lösung

Um den Einfluß eines Azimutfehlers auf das Ergebnis zu prüfen, differenzieren wir (IV; 19) nach A und φ und erhalten

$$\sin A \, d\varphi \, (\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \delta \cos t) =$$
$$= dA \, [\cos A \, (\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t) -$$
$$- \sin A \cos \delta \sin t]$$

oder, wenn wir die Gleichungen (II; 23) berücksichtigen,

$$d\varphi = -\frac{\operatorname{tg} z}{\sin A} \, dA = -\frac{df}{\sin A \cos z}. \qquad \text{(IV; 24)}$$

Hier bedeutet $df = \sin z \, dA$ den Einstellfehler des Sterns auf den Vertikalfaden des Gesichtsfeldes. Es zeigt sich, daß die günstigsten Beobachtungsbedingungen vorliegen, wenn der Stern im Ersten Vertikal steht, während im Meridian die Polhöhenbestimmung aus Azimuten unmöglich ist. Ferner ist es vorteilhaft, kleine Zenitdistanzen zu wählen.

36. Polhöhenbestimmung aus Durchgängen zweier Sterne durch den gleichen Vertikal

Beobachtet man die Durchgänge zweier Sterne durch den gleichen Vertikal, so läßt sich das Azimut A des Vertikals eliminieren. Die Bestimmung der Polhöhe ist dann von den Fehlern des Azimutkreises frei, und ihre Genauigkeit hängt nur von der Zuverlässigkeit der beiden beobachteten Durchgangszeiten ab.

Wendet man (III; 17) auf die beiden Sternörter (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) an, die den gegebenen Vertikal $(A, A + \pi)$ zu den Zeiten Θ_1, Θ_2 bzw. in den Stundenwinkeln t_1, t_2 überschreiten, so ergibt der Vergleich der rechten Seiten

$$\cos \delta_1 \sin t \, (\cos \delta_2 \sin \varphi \cos t_2 - \sin \delta_2 \cos \varphi) =$$
$$= \cos \delta_2 \sin t_2 \, (\cos \delta_1 \sin \varphi \cos t_1 - \sin \delta_1 \cos \varphi)$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \delta_1 \sin t_2 - \operatorname{tg} \delta_2 \sin t_1}{\sin (t_2 - t_1)}. \qquad \text{(IV; 25)}$$

Zur Untersuchung der Fehlereinflüsse benutzen wir (IV; 24), wobei wir die Azimutfehler dA_i ($i = 1,2$) der beiden Beobachtungen in die Bestandteile

$$d A_i = dA + \frac{df_i}{\sin z_i} \qquad \text{(IV; 26)}$$

zerlegen, d. h. in den hier zu eliminierenden Ablesefehler dA des Azimutkreises und den Einstellfehler df_i auf den Faden. Es ist sodann

$$\sin A_1 \cos z_1 \, d\varphi = -\sin z_1 \, dA - df_1,$$

$$\sin A_2 \cos z_2 \, d\varphi = -\sin z_2 \, dA - df_2.$$

Hierbei ist $\sin A_2 = \pm \sin A_1$, je nachdem die zweite Beobachtung auf der gleichen oder der entgegengesetzten Seite vom Zenit gemacht wurde. Eliminiert man dA, so erhält man

$$d\varphi = \frac{df_2 \sin z_1 - df_1 \sin z_2}{\sin A_1 \sin (z_2 \mp z_1)}.$$

Ist ε der mittlere Fehler der Fadeneinstellungen, ε_φ der mittlere Fehler der Polhöhe, so folgt nach Anhang D IV

$$\varepsilon_\varphi^2 = \varepsilon^2 \frac{\sin^2 z_1 + \sin^2 z_2}{\sin^2 A_1 \sin^2 (z_2 \mp z_1)}. \qquad \text{(IV; 27)}$$

Hieraus ergibt sich, daß die Sterne am vorteilhaftesten im Ersten Vertikal beobachtet werden ($\sin^2 A = 1$). Befinden sich die Sterne auf der gleichen Seite vom Zenit, so sollten sie möglichst verschiedene Zenitdistanzen haben [$\sin (z_2 - z_1) = 1$]. Das praktisch unerreichbare Optimum würde eintreten, wenn der eine Stern im Zenit, der andere im Horizont (Ost- oder Westpunkt) beobachtet würde. Es wäre dann $\varepsilon_\varphi = \varepsilon$. Finden die beiden Vertikaldurchgänge auf verschiedenen Seiten des Zenits statt, so tritt das Minimum der symmetrischen Funktion $\frac{\sin^2 z_1 + \sin^2 z_2}{\sin^2 (z_1 + z_2)}$ bei vorgegebenem z_1 ein, wenn $z_2 = z_1$. Es wird dann $\varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} \cos z_1}$, und es erweist sich somit als zweckmäßig, möglichst zenitnahe Sterne zu wählen. Die Beobachtung auf verschiedenen Seiten vom Zenit (Ost- und Weststern) ist also aus mehr als einem Grunde vorzuziehen — der optimale Fehler ist kleiner, und die Beobachtung kann in kleinen und gleichen Zenitdistanzen erfolgen (bessere Bildbeschaffenheit der Sterne, kleine Refraktion, gleiche Beobachtungsbedingungen für beide Sterne).

Wie bei Zeitbestimmungen aus Vertikaldurchgängen von Sternpaaren (Abschnitt 26, Abb. 24) kann auch bei der oben beschriebenen Methode der Polhöhenbestimmung das Harzer*sche Fadendreieck* benutzt werden. Es ist nur in diesem Falle das andere (nord-südlich gerichtete) Paar von Querstangen zum Aufhängen des Fadens zu benutzen, damit die Ebene des Dreiecks möglichst der Ebene des Ersten Vertikals benachbart ist.

Eine Variante der Methode der Polhöhenbestimmung im gleichen Vertikal erhält man, wenn man zusätzlich fordert, daß die Durchgänge *gleichzeitig* erfolgen sollen. Man kann dann, wenn Θ die gemeinsame Sternzeit des Vertikaldurchgangs ist, die Formeln (III; 33), (III; 34) benutzen, indem man zunächst i, Ω nach (III; 34) berechnet und dann φ aus der dritten Gleichung (III; 33) bestimmt. Praktisch läßt sich diese Methode mit jedem Universalinstrument durchführen, wenn man als ersten Stern (S_1) einen solchen wählt, der nicht weit vom Zenit in größter Digression steht. S_1 soll also ein Stern sein, für den $|\delta|$ wenig größer als $|\varphi|$ ist. Nach (II; 37) findet die größte Digression eines solchen Sternes in der Nachbarschaft des Ersten Vertikals statt, und da der Stern längere Zeit hindurch sein Azimut nicht wesentlich ändert, hat man Zeit (ähnlich wie bei Zeitbestimmungen im Vertikal des Polarsterns), zwischen zwei Beobachtungen von S_1 eine von S_2 einzuschieben, und man darf dann die Beobachtungszeit von S_2 auch S_1 zuschreiben.

Auch die Harzersche Fadenmethode läßt sich hierbei anwenden, wenn man das einfache Fadenlot benutzt, dessen Gewicht man zur Abdämpfung von Schwingungen in ein Gefäß mit Wasser hängen läßt. Man beobachtet dann das gleichzeitige Verschwinden der beiden Sterne hinter dem Faden. In diesem Falle müssen natürlich beide Sterne dasselbe Azimut haben, also auf der gleichen Seite vom Zenit stehen. Zweckmäßigerweise wählt man S_1 in der Nähe seiner größten Digression in kleiner Zenitdistanz, S_2 unterhalb von S_1 in großer Zenitdistanz.

37. Polhöhenbestimmung aus den zeitlichen Änderungen der Zenitdistanz oder des Azimuts

Aus den Formeln (II; 30) geht hervor, daß die zeitlichen Änderungen der Zenitdistanz und des Azimuts der Gestirne im Ersten Vertikal ($\cos A = 0$, $\sin A = \pm 1$) die Werte

$$\frac{dz}{dt} = \pm \cos\varphi, \qquad \frac{dA}{dt} = \sin\varphi$$

annehmen, also unabhängig von der Deklination bzw. der Zenitdistanz sind. Das positive Zeichen von $\frac{dz}{dt}$ gilt für den westlichen Durchgang.

Aus diesem merkwürdigen Satz folgt eine hübsche Methode der Polhöhenbestimmung: Entwickelt man nämlich die Zenitdistanz in der Umgebung des Durchgangs durch den Ersten Vertikal in eine Taylorsche Reihe, so erhält

man für zwei Stundenwinkel t_1, t_2

$$z_1 = z_0 + \tau_1 \frac{dz_0}{dt} + \frac{1}{2}\tau_1^2 \frac{d^2 z_0}{dt^2} + \frac{1}{6}\tau_1^3 \frac{d^3 z_0}{dt^3} + \cdots,$$

$$z_2 = z_0 + \tau_2 \frac{dz_0}{dt} + \frac{1}{2}\tau_2^2 \frac{d^2 z_0}{dt^2} + \frac{1}{6}\tau_2^3 \frac{d^3 z_0}{dt^3} + \cdots.$$

Hierbei seien z_0, t_0, $\frac{dz_0}{dt}$ ..., Zenitdistanz, Stundenwinkel und Ableitungen der Zenitdistanz im Ersten Vertikal, und es werde $\tau_1 = t_1 - t_0$, $\tau_2 = t_2 - t_0$ gesetzt. Die Differenz beider Gleichungen lautet dann

$$z_2 - z_1 = (\tau_2 - \tau_1)\frac{dz_0}{dt} + \frac{1}{2}(\tau_2^2 - \tau_1^2)\frac{d^2 z_0}{dt^2} + \frac{1}{6}(\tau_2^3 - \tau_1^3)\frac{d^3 z_0}{dt^3} + \cdots.$$

Da nun im Ersten Vertikal

$$\frac{dz_0}{dt} = \pm\cos\varphi, \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3 z_0}{dt^3} = \mp\cos\varphi\sin^2\varphi, \cdots,$$

wie man aus (II; 30) und (II; 32) herleitet, so ergibt sich

$$\cos\varphi = \pm\frac{z_2 - z_1}{\tau_2 - \tau_1} + \frac{1}{6}\cos\varphi\sin^2\varphi\,(\tau_1^2 + \tau_1\tau_2 + \tau_2^2) + \cdots, \qquad \text{(IV; 28)}$$

wobei wieder das positive Zeichen für einen Weststern gilt. In erster Näherung ist also wegen $\tau_2 - \tau_1 = t_2 - t_1$

$$\cos\varphi = \pm\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}. \qquad \text{(IV; 29)}$$

Sofern die Beobachtungen in unmittelbarer Nähe des Ersten Vertikals stattfinden und die Zeitdifferenz nicht übermäßig groß ist, reicht diese Näherung aus. Andernfalls kann man die Korrektion

$$+\frac{1}{6}\cos\varphi\sin^2\varphi\,(\tau_1^2 + \tau_1\tau_2 + \tau_2^2)$$

und, wenn nötig, auch höhere Glieder hinzufügen. Das zur Berechnung dieser Korrektionsglieder erforderliche φ entnimmt man der ersten Näherung. Die Größen τ_1, τ_2 enthalten den Stundenwinkel im Ersten Vertikal, der (ebenfalls mit dem genäherten φ) aus (II; 18) zu berechnen ist.

Diese Methode eignet sich am besten für hohe Breiten. Es ist zu beachten, daß die Differenz $z_2 - z_1$, die man vorteilhaft bei unveränderter Höheneinstellung des Fernrohrs mit dem horizontalen Mikrometerfaden mißt, wegen der *differentiellen Refraktion* korrigiert werden muß. Da jede gemessene Zenitdistanz um die Refraktion $r(z)$ verkleinert erscheint, ist statt (IV; 29)

$$\cos\varphi = \pm\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \pm \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}.$$

Zur Berechnung des Zusatzgliedes genügt es, den Differenzenquotienten durch den Differentialquotienten zu ersetzen. Man erhält

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dr}{dz},$$

also

$$\cos\varphi = \pm \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}\left(1 + \frac{dr}{dz}\right),$$

wobei $\frac{dr}{dz}$ aus Anhang F IV zu entnehmen ist. Diese Tafel gibt die differentielle Refraktion für mittlere atmosphärische Verhältnisse (+ 10° C, 760 mm Hg), was bei nicht zu großen Zenitdistanzen immer ausreicht.

Die entsprechende Methode der Polhöhenbestimmung aus *Azimutdifferenzen* erscheint zunächst weniger brauchbar, da ja die zweite Ableitung des Azimuts im Ersten Vertikal nicht verschwindet. Es ist für $A_0 = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dA_0}{dt} = \sin\varphi, \quad \frac{d^2 A_0}{dt^2} = \mp \cos\varphi \sin\varphi \operatorname{ctg} z_0 = -\sin\varphi \operatorname{ctg} t_0.$$

Der Ausdruck für die dritte Ableitung wird bereits recht kompliziert. Man kann aber die Formel

$$\sin\varphi = \frac{A_2 - A_1}{t_2 - t_1} + \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \sin\varphi \operatorname{ctg} t_0 + \cdots$$

mit Vorteil bei kleinen Breiten benutzen, wo (IV; 28) versagt. Wenn man Sterne kleiner Deklination nimmt, für die im Ersten Vertikal nach (II; 18) ctg t_0 klein ist, und dafür sorgt, daß die Beobachtungszeiten möglichst symmetrisch zur Durchgangszeit durch den Ersten Vertikal liegen, wird auch hier schon das zweite Glied hinreichend klein.

V. KAPITEL

GLEICHZEITIGE BESTIMMUNG VON ORTSZEIT UND POLHÖHE AUS KOMBINIERTEN BEOBACHTUNGEN

38. Das Zweihöhenproblem. Lösung von KRAFFT-HARZER

Bei den bisher beschriebenen Methoden der Ortsbestimmung haben wir stets angenommen, daß eine der beiden Größen φ und Δu bekannt sei. In diesem Kapitel sollen diejenigen Methoden beschrieben werden, die eine *vollständige* Ortsbestimmung vermitteln, in denen also sowohl die geographische Breite als auch die Ortszeit (deren Kenntnis ja nach den Ergebnissen des Abschnitts 10 die wesentliche Voraussetzung für die Bestimmung der geographischen Länge bildet) als Unbekannte auftreten.

Die Aufgabe, Ortszeit und Polhöhe aus zwei gemessenen Zenitdistanzen abzuleiten, wird als *Zweihöhenproblem* oder auch als das DOUWESsche *Problem* bezeichnet. Der holländische Seefahrer DOUWES (18. Jahrh.) hat eine für den Gebrauch auf See besonders zugeschnittene Lösung dieser Aufgabe angegeben, die eine genäherte Kenntnis der beiden Unbekannten zur Voraussetzung hat. Ehe wir auf dieses und auf andere in der Nautik verwendete spezielle Verfahren eingehen, soll das Problem allgemein und ohne besondere Voraussetzungen gelöst werden.

Eine sehr brauchbare und wenig bekannte Lösung des Zweihöhenproblems ist von W. L. KRAFFT (St. Petersburg 1799) gefunden worden.[1] P. HARZER hat sie auf folgende besonders einfache und elegante Form gebracht: Es seien die Zenitdistanzen z_1, z_2 der Sterne $S_1\,(\alpha_1, \delta_1)$, $S_2\,(\alpha_2, \delta_2)$ zu den Uhrzeiten u_1, u_2 gemessen worden. Die zugehörigen Stundenwinkel seien

$$t_1 = t - \lambda = u_1 + \Delta u - \alpha_1\,,$$
$$t_2 = t + \lambda = u_2 + \Delta u - \alpha_2\,;$$

es ist also

$$t = \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \Delta u\,,$$

$$\lambda = \frac{u_2 - u_1}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$$

---

[1]) Essai sur la méthode de trouver la latitude sur mer de l'altitude de deux étoiles. Nova Acta Academiae Petropolitanae, Tome XIII, 1802,

und somit λ bekannt, während t (das Δu enthält) neben φ als Unbekannte auftritt. Für die beiden Beobachtungen gilt dann nach (II; 23)

$$\left.\begin{aligned} \cos z_1 &= \sin\varphi\sin\delta_1 + \cos\varphi\cos\delta_1(\cos t\cos\lambda + \sin t\sin\lambda), \\ \cos z_2 &= \sin\varphi\sin\delta_2 + \cos\varphi\cos\delta_2(\cos t\cos\lambda - \sin t\sin\lambda). \end{aligned}\right\} \qquad (V;\,1)$$

Setzt man nun

$$x = \cos\varphi\cos t,$$

$$y = \cos\varphi\sin t,$$

$$z = \sin\varphi,$$

so bestimmen sich x, y, z und damit φ, t aus den drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \cos z_1 &= x\cos\delta_1\cos\lambda + y\cos\delta_1\sin\lambda + z\sin\delta_1, \\ \cos z_2 &= x\cos\delta_2\cos\lambda - y\cos\delta_2\sin\lambda + z\sin\delta_2, \\ 1 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}\right\} \qquad (V;\,2)$$

Damit ist die Lösung der Aufgabe in wenigen Strichen skizziert, und es erübrigt sich fast, sie explizit hinzuschreiben. Eliminiert man aus den ersten beiden Gleichungen (V; 2) y bzw. x, so erhält man

$$x = c - az, \quad y = d - bz$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\sin(\delta_1+\delta_2)}{2\cos\delta_1\cos\delta_2\cos\lambda}, \qquad b = \frac{\sin(\delta_1-\delta_2)}{2\cos\delta_1\cos\delta_2\sin\lambda}, \\ c &= \frac{1}{2\cos\lambda}\left(\frac{\cos z_1}{\cos\delta_1} + \frac{\cos z_2}{\cos\delta_2}\right), \quad d = \frac{1}{2\sin\lambda}\left(\frac{\cos z_1}{\cos\delta_1} - \frac{\cos z_2}{\cos\delta_2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (V;\,3)$$

Setzt man (V; 3) in die letzte Gleichung (V; 2) ein, so erhält man für z die quadratische Gleichung

$$(c - az)^2 + (d - bz)^2 + z^2 = 1$$

oder

$$z^2 - 2Az = B,$$

mit

$$A = \frac{ac + bd}{1 + a^2 + b^2}, \quad B = \frac{1 - (c^2 + d^2)}{1 + a^2 + b^2}$$

und den Lösungen

$$z = A \pm \sqrt{A^2 + B}.$$

Die Notwendigkeit zweier Lösungen folgt geometrisch aus Abb. 34. Das Dreieck PS_1S_2 ist seiner Gestalt nach durch die beiden Poldistanzen und durch den Winkel $S_1PS_2 = 2\lambda$ gegeben; zu seiner Fixierung an der Sphäre fehlt nur die Angabe der Lage des Zenits in bezug auf das Dreieck. Nun liegt das Zenit 1. auf dem Kreise um S_1 mit z_1, 2. auf dem Kreise um S_2 mit z_2; es sind

also zwei Zenitlagen Z und Z' möglich, die den beiden Schnittpunkten dieser Kreise entsprechen. Gleichzeitig erkennt man, daß die Lösung am genauesten, d. h. am wenigsten durch Beobachtungsfehler beeinflußbar ist, wenn die beiden Kreise sich rechtwinklig schneiden. In diesem Falle schneiden sich auch die Vertikale der beiden Sternörter rechtwinklig. Im übrigen spielt dabei das Azimut der Vertikale und die Zenitdistanz der beiden Sterne keine Rolle.

Zu den gleichen Ergebnissen gelangt man natürlich auch auf Grund von Differentialbetrachtungen. Differenziert man die Grundgleichungen (V; 1) nach z_i, t_i, φ, wobei man $dt_1 = dt_2 = d\Delta u$ setzen kann, so erhält man ($i = 1, 2$)

$$\sin z_i \, dz_i = $$
$$= (-\cos\varphi \sin\delta_i + \sin\varphi\cos\delta_i\cos t_i)\, d\varphi + $$
$$+ \cos\varphi\cos\delta_i \sin t_i \, d\Delta u,$$

und wenn man (II; 23) berücksichtigt und durch $\sin z_i$ kürzt,

$$\left.\begin{aligned} \cos A_1\, d\varphi + \sin A_1 \cos\varphi\, d\Delta u = dz_1, \\ \cos A_2\, d\varphi + \sin A_2 \cos\varphi\, d\Delta u = dz_2. \end{aligned}\right\} \text{(V;4)}$$

Hieraus bestimmt man

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\sin A_2 dz_1 - \sin A_1 dz_2}{\sin(A_2 - A_1)}, \\ \cos\varphi\, d\Delta u &= \frac{\cos A_1 dz_2 - \cos A_2 dz_1}{\sin(A_2 - A_1)}. \end{aligned}\right\} \text{(V;5)}$$

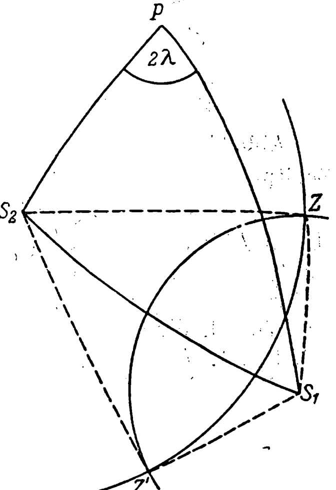


Abb. 34: Zweihöhenproblem. Zwei Lösungen

Ist also ε der mittlere Fehler der Zenitdistanzmessungen, so ergeben sich die mittleren Fehler der Polhöhe und des Uhrstandes nach Anhang D IV aus

$$\varepsilon_\varphi^2 = \varepsilon^2 \frac{\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2}{\sin^2(A_2 - A_1)}, \quad \cos^2\varphi\, \varepsilon_{\Delta u}^2 = \varepsilon^2 \frac{\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2}{\sin^2(A_2 - A_1)}.$$

Da Sternzeit und Polhöhe die Koordinaten des Zenits sind, so wird die günstigste Lösung des Ortsbestimmungsproblems erreicht, wenn das durch die berechneten Größen Δu, φ gegebene Zenit von dem wirklichen einen möglichst kleinen Abstand hat. In Abb. 35 sei Z das wahre, Z' das errechnete Zenit, $d\sigma$ die Entfernung dieser beiden Punkte. Fällt man von Z' auf den Meridian PZ das Lot $Z'Q$, so kann man das sehr kleine rechtwinklige Dreieck QZZ' als eben ansehen, und es ist, da die Katheten $Z'Q = \cos\varphi\, d\Delta u$, $ZQ = d\varphi$ sind,

$$(d\sigma)^2 = (d\varphi)^2 + \cos^2\varphi\,(d\Delta u)^2$$

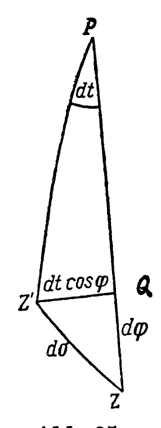


Abb. 35: Zenitpunktfehler

und somit der *mittlere Zenitfehler*

$$\varepsilon_\sigma = \sqrt{\varepsilon_\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\varepsilon_{\Delta u}^2} = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{|\sin(A_2 - A_1)|}\,.$$

Der mittlere Zenitfehler ist also am kleinsten, wenn $A_2 = A_1 \pm \frac{\pi}{2}$, d. h., wenn sich die beiden Vertikale rechtwinklig schneiden. Im übrigen ist ε_σ weder von A_1 noch von den Zenitdistanzen der beiden Sterne abhängig.

39. Das Zweihöhenproblem nach GAUSS

Von C. F. Gauss[1]) stammt folgende Lösung des Zweihöhenproblems, die wesentlich komplizierter, aber für logarithmische Rechnung bequemer als die im vorigen Abschnitt beschriebene algebraische Methode ist. In Abb. 36 seien S_1 und S_2 die beiden Sternörter, D ihre Distanz, $\lambda = t_2 - t_1 = u_2 - u_1$ die Differenz der Stundenwinkel, $\mu = A_2 - A_1$ die Differenz der Azimute, p_1, p_2 die parallaktischen Winkel, s_1, s_2 die beiden Winkel, die der größte Kreis S_1S_2 mit den beiden Stundenkreisen PS_1, PS_2 bildet. Auf Grund der Gaussschen Formeln [Anhang A IV (9)] ist dann im Dreieck PS_1S_2

$$\cos\frac{D}{2}\cos\frac{s_2 - s_1}{2} = \cos\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}\,,$$

$$\cos\frac{D}{2}\sin\frac{s_2 - s_1}{2} = \sin\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\delta_2 + \delta_1}{2}\,,$$

$$\sin\frac{D}{2}\cos\frac{s_2 + s_1}{2} = \cos\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}\,,$$

$$\sin\frac{D}{2}\sin\frac{s_2 + s_1}{2} = \sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\delta_2 + \delta_1}{2}\,.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich D, s_1, s_2 aus Tangentenformeln berechnen, da die rechten Seiten bekannt sind. In dem Dreieck ZS_1S_2 sind nunmehr die drei Seiten D, z_1, z_2 bekannt — die letzteren beiden aus den Beobachtungen. Nach Anhang A III (7) findet man daher, wenn man

$$s = \frac{1}{2}(D + z_1 + z_2)$$

---

[1]) C. F. Gauss: Methodus peculiaris elevationis poli determinandi. Werke Bd. VI, pag. 37. Göttingen 1908.

setzt,

$$\operatorname{tg}^2\frac{s_1+p_1}{2}=\frac{\sin(s-D)\sin(s-z_1)}{\sin s\cdot\sin(s-z_2)},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{s_2+p_2}{2}=\frac{\sin(s-D)\sin(s-z_2)}{\sin s\cdot\sin(s-z_1)}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}\frac{s_1+p_1}{2}=\pm\sqrt{fg},\quad \operatorname{tg}\frac{s_2+p_2}{2}=\pm\sqrt{\frac{f}{g}},\\ \text{mit}\quad &f=\frac{\sin(s-D)}{\sin s},\quad g=\frac{\sin(s-z_1)}{\sin(s-z_2)}.\end{aligned}\right\}\qquad (V;\,6)$$

Die Gleichungen (V; 6) ergeben, je nach Wahl der Vorzeichenkombination, vier verschiedene Lösungspaare p_1, p_2, während wir aus den Überlegungen des vorigen Abschnitts wissen, daß es nur zwei geben kann. Nun liefert im Dreieck S_1ZS_2 der Sinussatz

$$\frac{\sin z_1}{\sin z_2}=\frac{\sin(s_2+p_2)}{\sin(s_1+p_1)}.$$

Daraus folgt aber, da $\sin z_1$ und $\sin z_2$ wesentlich positiv sind, daß $\sin(s_1+p_1)$ und $\sin(s_2+p_2)$ stets das gleiche Vorzeichen haben. Es sind also die Winkel $\frac{s_1+p_1}{2}$ und $\frac{s_2+p_2}{2}$ stets gleichzeitig $<\frac{\pi}{2}$ oder $>\frac{\pi}{2}$, so daß also die beiden Wurzeln in (V; 6) keine verschiedenen Vorzeichen haben können und die Zahl der Möglichkeiten sich somit auf zwei vermindert.

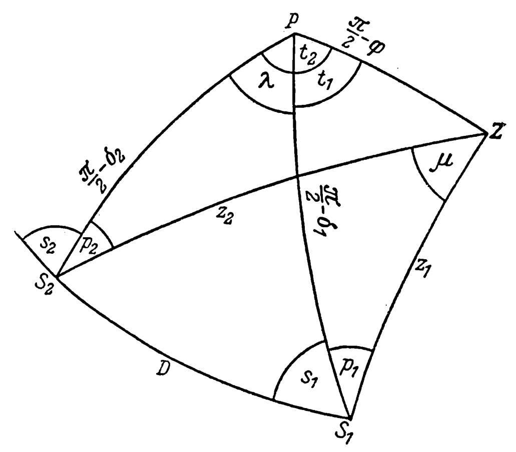


Abb. 36: Zweihöhenproblem nach GAUSS

Nachdem p_1, p_2 vorliegen, folgen φ, t_1, t_2 aus den Nautischen Dreiecken PZS_1 und PZS_2 nach den Grundformeln

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi&=\sin\delta_i\cos z_i+\cos\delta_i\sin z_i\cos p_i,\\ \cos\varphi\cos t_i&=\cos\delta_i\cos z_i-\sin\delta_i\sin z_i\cos p_i,\\ \cos\varphi\sin t_i&=\sin z_i\sin p_i,\end{aligned}\right\}\qquad (V;\,7)$$

wobei noch $t_2=t_1+\lambda$ zur Kontrolle dient. Um die Formeln (V; 7) für die logarithmische Rechnung bequemer zu machen, führt man die Hilfsgrößen m_i, n_i durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\cos m_i\cos n_i&=\cos z_i,\\ \cos m_i\sin n_i&=\sin z_i\cos p_i\quad (i=1,2),\\ \sin m_i&=\sin z_i\sin p_i\end{aligned}$$

ein. Man erhält dann statt (V; 7)

$$\sin\varphi = \cos m_i \sin(\delta_i + n_i),$$
$$\cos\varphi \cos t_i = \cos m_i \cos(\delta_i + n_i),$$
$$\cos\varphi \sin t_i = \sin m_i.$$

Die Formeln des Zweihöhenproblems, sowohl nach dieser als auch nach der im vorigen Abschnitt beschriebenen Methode, werden einfacher, wenn man für beide Beobachtungen denselben Stern (in nahezu um $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Azimuten) verwendet, da dann $\delta_1 = \delta_2$ wird. Das hat den Nachteil, daß die Zwischenzeiten unter Umständen ziemlich groß sind, wenn man nicht einen Stern wählt, der in Zenitnähe gelangt, wo das Azimut sich rasch ändert. Ist der Beobachter auf Sonnenbeobachtungen angewiesen (z. B. im arktischen Sommer), so ist nur diese Variante möglich, und man muß daher die Nachteile der langen Zwischenzeit in Kauf nehmen. Man muß dann aber auch auf die kleinen Änderungen der Deklination Rücksicht nehmen.

Weitere Vereinfachungen ergeben sich, wenn man vorschreibt, daß die beiden Zenitdistanzen gleich sein sollen. Handelt es sich dabei wieder um einen und denselben Stern, so folgt, daß er in den Azimuten $\pm A$ zu beobachten ist, wobei nach Möglichkeit $A \sim \frac{\pi}{4}$ sein sollte. Es sei dem Leser überlassen, für diese Spezialfälle des Zweihöhenproblems die vereinfachten Formelschemata zu entwickeln.

40. Lösung des Zweihöhenproblems durch Hypothesenrechnung. Die Standlinienmethode

In den meisten Fällen werden dem Beobachter gute Näherungswerte der Unbekannten Δu, φ bereits bekannt sein. Er wird dann die gemessenen Zenitdistanzen und die dazugehörigen Uhrzeiten dazu verwenden, die kleinen Verbesserungen $d\Delta u$, $d\varphi$ abzuleiten, die an die hypothetischen Ausgangswerte Δu_0, φ_0 angebracht werden müssen, um die wahren Beträge dieser Größen zu erhalten.

Mit φ_0 und $t_{i0} = u_i - \alpha_i + \Delta u_0$ $(i = 1, 2)$ berechne man die der Uhrzeit u_i entsprechenden genäherten Koordinaten A_{i0}, z_{i0} des Sterns S_i nach den Formeln (II; 23):

$$\cos z_{i0} = \sin\varphi_0 \sin\delta_i + \cos\varphi_0 \cos\delta_i \cos t_{i0},$$
$$\sin z_{i0} \cos A_{i0} = -\cos\varphi_0 \sin\delta_i + \sin\varphi_0 \cos\delta_i \cos t_{i0},$$
$$\sin z_{i0} \sin A_{i0} = \cos\delta_i \sin t_{i0},$$

während die beobachteten Zenitdistanzen $z_i = z_{i0} + dz_i$ sein mögen, so daß

$$dz_1 = z_1 - z_{10}, \quad dz_2 = z_2 - z_{20}$$

die den Verbesserungen $d\Delta u$, $d\varphi$ entsprechenden Korrektionen der Zenitdistanzen sind. Sofern man alle diese Korrektionen als Differentiale ansehen darf, sind die Formeln (V; 5) auf sie anwendbar, und man erhält

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\sin A_{20} dz_1 - \sin A_{10} dz_2}{\sin(A_{20} - A_{10})}, \\ \cos\varphi\, d\Delta u &= \frac{\cos A_{10} dz_2 - \cos A_{20} dz_1}{\sin(A_{20} - A_{10})} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V; 8)}$$

als Lösung der Aufgabe. Die verbesserten Werte $\varphi = \varphi_0 + d\varphi$, $\Delta u = \Delta u_0 + + d\Delta u$ können als endgültig angesehen werden, wenn die *Quadrate* der Ausdrücke (V; 8) unter der Schwelle der Rechengenauigkeit liegen. Tun sie das nicht, so muß die Rechnung mit den verbesserten Werten wiederholt werden.

Der *Seemann*, der graphische Methoden und den Gebrauch von Tafeln umständlichen Rechnungen vorzieht, hat verschiedene Varianten dieses Verfahrens ausgebildet, von denen die wichtigste die sogenannte *Standlinienmethode* ist.

Die genäherten Werte Δu_0, φ_0 sind auf See, von seltenen Ausnahmen abgesehen, immer verfügbar. Vom Schiffsort der letzten sicheren Ortsbestimmung aus ist der neue Ort durch *Gissen* (siehe Abschnitt 1) genähert bekannt. Das Schiffschronometer zeigt gewöhnlich die konventionelle Zonenzeit des Heimathafens oder die Greenwicher Ortszeit (Weltzeit) an. Von der Kontrolle dieser Uhren, die zum Zwecke der Bestimmung der *geographischen Länge* notwendig ist, wird im nächsten Kapitel die Rede sein — hier möge bemerkt werden, daß sie heute durch Abhören der internationalen funkentelegraphischen Zeitzeichen stets ohne Schwierigkeit und mit jeder gewünschten Genauigkeit möglich ist. Es werde also jetzt der Stand des Schiffschronometers als bekannt angesehen. Ferner sei λ_0, φ_0 der gegißte Ort, $\lambda = \lambda_0 + d\lambda$, $\varphi = \varphi_0 + d\varphi$ der wahre Ort des Schiffes und $\overline{m}$ die Weltzeit der Beobachtung, die man nötigenfalls leicht in die Greenwicher Sternzeit $\overline{\Theta}$ verwandeln kann.

Das Standlinienverfahren beruht nun auf folgender Überlegung: Zur Beobachtungszeit Θ steht der beobachtete Stern (α, δ) im Zenit des Ortes S mit den geographischen Koordinaten δ (Breite) und $\overline{\Theta} - \alpha$ (Länge). Der Beobachtungsort B, von dem aus das Gestirn in der Zenitdistanz z erblickt wurde, liegt also auf einem Kreis um S mit dem Halbmesser z (wobei wir die Erdoberfläche als eine Kugel mit dem Halbmesser eins betrachten dürfen). Werden zwei Sterne (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) in den Zenitdistanzen z_1 und z_2 beobachtet, so erhält man also für den Schiffsort B (λ, φ) zwei geometrische Örter in Gestalt der beiden Kreise um S_1 $(\overline{\Theta}_1 - \alpha_1, \delta_1)$ und S_2 $(\overline{\Theta}_2 - \alpha_2, \delta_2)$ mit den Halbmessern z_1 und z_2, die man auch als die SUMNERschen *Kreise* bezeichnet (nach dem amerikanischen Kapitän TH. H. SUMNER, der die Standlinienmethode 1837 erfand). Ihr Schnittpunkt ergibt die wahre geographische

Lage des Schiffsortes (Abb. 37), der irgendwo in der Nähe des gegißten Orts B' (λ_0, φ_0) liegen muß. Wenn nun die Entfernung BB' gegen die auf der Erdoberfläche gemessenen Bögen z_1 und z_2 klein ist, so kann man die Kreisbögen in dem Bereich der Seekarte um B und B' als gerade Linien (Standlinien) betrachten, deren Richtungen durch die Azimute $A_1 \pm \frac{\pi}{2}$, $A_2 \pm \frac{\pi}{2}$ gegeben sind, wenn A_1, A_2 die Azimute der Gestirne während der Beobachtung bezeichnen.

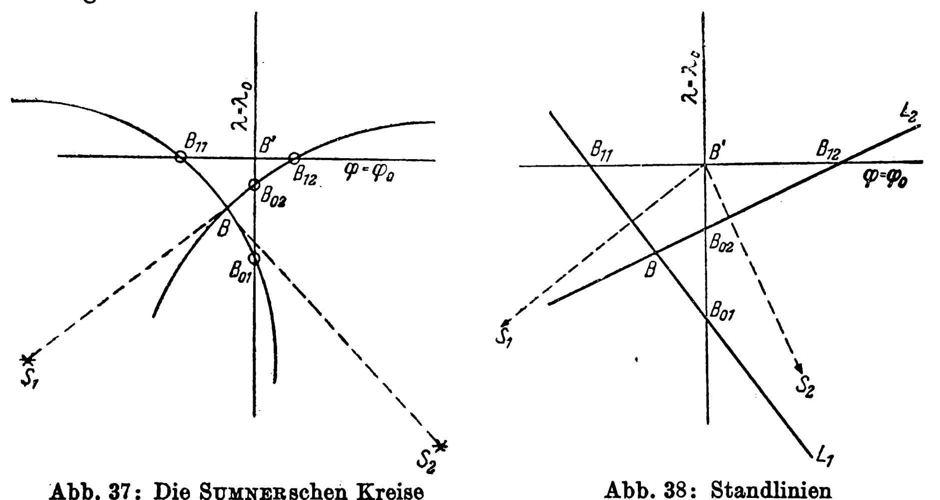


Abb. 37: Die Sumnerschen Kreise **Abb. 38: Standlinien**

Die Schnittpunkte der zu den beiden Sternen gehörigen Standlinien L_1, L_2 (Abb. 38) mit dem Längen- und Breitenkreis von B' mögen B_{01}, B_{11} bzw. B_{02}, B_{12} heißen. Der Beobachtungsort B läßt sich dann graphisch finden, wenn man von diesen Hilfsörtern irgendeine der vier Kombinationen

$$(B_{01}, B_{02}),\ (B_{01}, B_{12}),\ (B_{11}, B_{02}),\ (B_{11}, B_{12})$$

kennt, da durch sie und die Azimute A_1, A_2 die beiden Standlinien definiert sind. Voraussetzung ist dabei natürlich, daß die benutzte Kartenprojektion *winkeltreu* ist (Merkator-Projektion!).

Will man z. B. die Kombination (B_{11}, B_{12}) benutzen, so gilt es, die Schnittpunkte der beiden Sumnerschen Kreise mit dem Breitenkreis $\varphi = \varphi_0$ aufzusuchen. Nimmt man φ_0, z, δ als gegeben an, so erhält man nach (II; 11), (II; 12)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} &= \frac{\sin(s-\varphi_0)\sin(s-\delta)}{\cos s \cos(s-z)}, \\ \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} &= \frac{\sin(s-\varphi_0)\cos(s-z)}{\cos s \sin(s-\delta)}. \end{aligned} \quad \left(s = \frac{\varphi_0 + \delta + z}{2}\right) \right\} \qquad (V;\ 9)$$

Wendet man diese Formeln auf beide Sterne an, so ergeben sich die zu φ_0, z_i, δ_i gehörigen Stundenwinkel t_1, t_2 und die Azimute A_1, A_2 der Normalen der beiden Standlinien. Es ist aber, wenn die Weltzeit $\overline{m}$ (bzw. $\overline{\Theta}$) des Schiffschronometers als richtig angesehen wird,

$$\lambda = \overline{\Theta} - \Theta = \overline{\Theta} - t - \alpha$$

oder, wenn die Sonne beobachtet wurde (μ = Zeitgleichung),

$$\lambda = \overline{m} - m = \overline{m} - t + \mu\,.$$

Damit sind die Längen von B_{11}, B_{12} bekannt, ebenso die Azimute der Standlinien, und B kann graphisch gefunden werden. Der Seemann erleichtert sich die einfache Rechnung meist noch dadurch, daß er die Azimute nicht rechnet, sondern durch „Anpeilen" der Sterne mit Hilfe des Kompasses roh bestimmt. Erweisen sich die Strecken BB_{11}, BB_{12} als so groß, daß die Krümmung der SUMNERschen Kreise nicht mehr vernachlässigt werden darf, so ist die Rechnung mit B statt B' als Ausgangsort zu wiederholen.

Bei der zweiten Lösung, die auf der Bestimmung der Hilfsörter B_{01}, B_{02} beruht, gilt es, die Schnittpunkte der SUMNERschen Kreise bzw. der Standlinien mit dem Längenkreis $\lambda = \lambda_0$ zu bestimmen. Es sind dann die Stundenwinkel

$$t_0 = \overline{\Theta} - \lambda_0 - \alpha \text{ bzw. (Sonne) } t_0 = \overline{m} - \lambda_0 + \mu$$

neben z und δ für jeden Stern gegeben und die dazugehörigen Werte φ, A zu berechnen. A findet man durch Anpeilen oder aus der dritten Gleichung (II; 23):

$$\sin A = \frac{\cos\delta \sin t_0}{\sin z}\,, \qquad \text{(V; 10)}$$

während die ersten beiden Gleichungen φ auf folgende Weise liefern: Sie sind linear in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ und ergeben, wenn man sie nach diesen Größen auflöst:

$$\sin\varphi\,(\sin^2\delta + \cos^2\delta\cos^2 t_0) = \sin\delta\cos z + \cos\delta\sin z\cos A\cos t_0,$$
$$\cos\varphi\,(\sin^2\delta + \cos^2\delta\cos^2 t_0) = \cos\delta\cos z\cos t_0 - \sin\delta\sin z\cos A,$$

mithin

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\delta\cos z + \cos\delta\sin z\cos A\cos t_0}{\cos\delta\cos z\cos t_0 - \sin\delta\sin z\cos A}$$

oder, wenn man durch $\cos\delta\cos z\cos t_0$ kürzt,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\delta\sec t_0 + \operatorname{tg} z\cos A}{1 - \operatorname{tg}\delta\sec t_0\operatorname{tg} z\cos A}\,.$$

Hieraus folgt aber, wenn man

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\delta\sec t_0, \quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg} z\cos A$$

setzt,

$$\varphi = \beta + \gamma. \qquad \text{(V; 11)}$$

Wendet man die Formeln (V; 10), (V; 11) auf beide Sterne an, so erhält man die Breiten der beiden Punkte B_{01}, B_{02} und die Azimute der Standliniennormalen und damit die notwendigen Daten zur Konstruktion von B.

Die beiden übrigen Kombinationen (B_{11}, B_{02}) und (B_{01}, B_{12}) sind einander gleichwertig, da sie sich nur durch die Numerierung der Sterne unterscheiden. Wählen wir die erstere, so ist B_{11} auf dem Breitenkreis $\varphi = \varphi_0$, B_{02} auf dem Längenkreis $\lambda = \lambda_0$ zu bestimmen. Bei allen diesen Verfahren wird die größte Genauigkeit erzielt, wenn die beiden Standlinien sich rechtwinklig schneiden, also die Azimute der beiden Sterne sich um 90° unterscheiden. Wichtig ist auch, daß die beiden Hilfspunkte B_{ik} von B nicht weit entfernt sind, da sich sonst die vernachlässigte Krümmung der SUMNERschen Kreise störend bemerkbar macht. Die Konstruktion der Standlinien ist dann mit verbesserten Ausgangsdaten φ_0 bzw. λ_0 zu wiederholen. Am raschesten konvergiert das Näherungsverfahren, wenn man die Kombination (B_{11}, B_{02}) wählt und den Stern S_1 im Ersten Vertikal, S_2 im Meridian beobachtet (siehe auch Abschnitt 41).

Schließlich sei noch auf eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Standlinien hingewiesen, die in der Praxis besonders beliebt ist: Man berechne für einen gegebenen Stern, dessen Zenitdistanz oder Höhe man beobachtet hat, t und damit λ nach (V; 9) mit zwei verschiedenen Hypothesen über φ, die zweckmäßigerweise von dem gegißten φ_0 nicht viel abweichen, etwa mit $\varphi_i = \varphi_0 \pm \Delta\varphi$; $\Delta\varphi = 30'$. Man erhält auf diese Weise zwei Örter (λ_1, φ_1) und (λ_2, φ_2), die man in die Karte einträgt, und deren Verbindungslinie, die Standlinie, genau genommen eine Sehne des SUMNERschen Kreises darstellt. Dasselbe wiederholt man mit einem zweiten Stern, dessen Azimut von dem des ersten möglichst um 90° abweicht. Auch hierbei sind Varianten möglich, z. B. die, daß man mit zwei Hypothesen $\lambda_i = \lambda_0 \pm \Delta\lambda$ die zugehörigen φ_i berechnet [nach (V; 11)] und nach diesem Verfahren eine der Standlinien oder alle beide konstruiert. Der Fehler des Ergebnisses ist bei nicht zu kleinen Zenitdistanzen meist zu vernachlässigen, wenn der neue Ort von den berechneten Hilfspunkten nicht zu weit entfernt ist. Andernfalls muß man mit verbesserten Ausgangswerten φ_0, λ_0 eine zweite Hypothese rechnen und nötigenfalls auch das Intervall $\Delta\varphi$ bzw. $\Delta\lambda$ verkleinern.

41. Das DOUWESsche Verfahren. Berücksichtigung der Bewegung des Schiffes

DOUWES, der seine für den Gebrauch auf See zugeschnittene Lösung des Zweihöhenproblems durch geeignete Hilfstafeln zu erleichtern bestrebt ist, benutzt Zenitdistanzen zweier Sterne, von denen der eine in der Nähe des Vertikals, der andere in der Nähe des Meridians beobachtet wird. Mit der gegißten Breite wird der Stundenwinkel t_1 des ersten Sternes nach (V; 9) ermittelt und damit ein gut genäherter Wert für die Ortszeit erhalten. Man ist dann in der Lage, aus der Zenitdistanz des zweiten Sternes die Polhöhe nach der Methode der Zirkummeridianzenitdistanzen oder nach (V; 10), (V; 11) zu bestimmen. Durch Wiederholung der Rechnung für den ersten

Stern mit der verbesserten Polhöhe ergibt sich dann ein genauerer Wert für die Ortszeit und damit, wenn die Weltzeitangabe der Schiffsuhr als gesichert angenommen werden darf, die geographische Länge.

Besonders einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn beide Beobachtungen sich auf dasselbe Gestirn beziehen. Die Differenz der Grundgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\cos z_1 &= \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t_1,\\ \cos z_2 &= \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t_2\end{aligned}\right\} \qquad (V;\,12)$$

ergibt dann

$$\cos z_1 - \cos z_2 = 2\sin\frac{z_2 - z_1}{2}\sin\frac{z_1 + z_2}{2} = 2\cos\varphi\cos\delta\sin\frac{t_2 - t_1}{2}\sin\frac{t_1 + t_2}{2}$$

oder, wenn wir

$$t_1 = t - \lambda,\; t_2 = t + \lambda,\; z_1 = z - \zeta,\; z_2 = z + \zeta$$

setzen,

$$\sin t = \frac{\sin z\sin\zeta}{\cos\varphi\cos\delta\sin\lambda} \qquad (V;\,13)$$

für den Stundenwinkel der *Mittelzeit* $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$, während sich die Polhöhe aus der zweiten (meridiannahen) Beobachtung ergibt. Da nämlich t_2 klein ist, setzt man

$$\cos t_2 = 1 - 2\sin^2\frac{t_2}{2}$$

und erhält dann aus der zweiten Gleichung (V; 12)

$$\cos(\varphi - \delta) = \cos z_2 + 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t_2}{2}. \qquad (V;\,14)$$

Die Rechnung nach den Formeln (V; 13), (V; 14) ist sehr kurz, wenn man Tafeln für die Größen $2\sin^2\frac{t}{2}$ und $\sin t$ zur Verfügung hat, in denen das Argument t im Zeitmaß ausgedrückt ist.

Wenn derselbe Stern für beide Beobachtungen verwendet wird, ist die Zwischenzeit 2λ so groß, daß auf die *Bewegung des Schiffes* („*Versegelung*") Rücksicht genommen werden muß. Es beziehen sich dann die beiden Beobachtungen auf verschiedene geographische Örter, deren Unterschiede $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$ aber durch Gissen genügend bekannt sind. Bei der *Standlinienmethode* reduziert man die erste Beobachtung auf die Zeit der zweiten, indem man den Hilfsort B_1, der der ersten Beobachtung entspricht und auf der Standlinie L_1 liegt, um die Schiffsbewegung $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$ nach B_1' verlegt (Abb. 39). Die neue Standlinie L_1' ist dann parallel zu L_1 zu zeichnen — das Azimut A_1 des Gestirns erscheint von B' aus nicht wesentlich verändert, da man ja die Krümmung der SUMNERschen Kreise vernachlässigt.

Verfährt man nach der DOUWES*schen Methode*, so muß man die erste Zenitdistanz wegen Versegelung korrigieren — sie muß offenbar (Abb. 40) um den Abstand B_1C der Standlinien L_1 und L_1' vermehrt oder vermindert werden, je nachdem C auf der entgegengesetzten oder der gleichen Seite von L_1 liegt wie S_1. Ist Δ die in Seemeilen (1 Sm = 1′) ausgedrückte Entfernung der beiden Schiffsörter, γ die Kursrichtung des Schiffes (von Osten über Norden gezählt), A_1 das Azimut des Sterns, so ist offensichtlich

$$dz_1 = B_1C = \Delta \cos\left[\gamma - \left(\frac{\pi}{2} - A_1\right)\right] = \Delta \sin(\gamma + A_1)$$

die an z_1 anzubringende Korrektion in Bogenminuten.

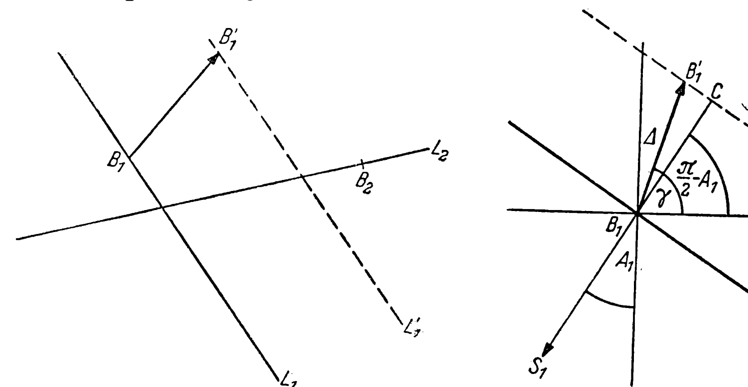


Abb. 39: Versetzung der Standlinie infolge der Schiffsbewegung

Abb. 40: Reduktion der Beobachtungen wegen Versegelung

Ist das beobachtete Gestirn die *Sonne*, so muß außerdem die Änderung der Deklination in der Zwischenzeit berücksichtigt werden. Wenn die eine der Beobachtungen (etwa z_2) in der Nähe des Meridians erhalten wird, genügt es, an z_2 die für den Meridian gültige Korrektion $\pm (\delta_1 - \delta_2)$ anzubringen, die zur Reduktion auf die Deklination δ_1 erforderlich ist. Das positive Zeichen gilt, wenn die Sonne nördlich, das negative, wenn sie südlich des Zenits kulminiert. Die geringfügige Ungenauigkeit, die man damit begeht, wenn die Beobachtung nicht genau im Meridian erfolgt, ist für die Ortsbestimmung auf See ohne Bedeutung.

42. Bestimmung der Zeit und der Polhöhe aus der Beobachtung zweier Sternpaare in gleichen Zenitdistanzen

Wir haben gesehen, daß es möglich ist, bei bekannter Polhöhe die Ortszeit und bei bekannter Zeit die Polhöhe aus der Beobachtung zweier Sterne in gleicher Zenitdistanz zu bestimmen. Bei beiden Methoden kam es auf die Werte der Zenitdistanz selbst gar nicht an, sondern nur auf die Durchgangszeiten durch den gleichen Almukantarat. Wir stellen uns nun die Aufgabe, Zeit und Polhöhe *gleichzeitig* aus der Beobachtung *zweier* Sternpaare in jeweils gleichen Zenitdistanzen zu ermitteln.

Für das erste Sternpaar (S_1, S_2) erhält man, wenn man $\tau_i = u_i - \alpha_i$, $t_i = \tau_i + \Delta u$ setzt, auf Grund der ersten Gleichung (II; 23):

$$\left.\begin{aligned}\cos z &= \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 (\cos\tau_1 \cos\Delta u - \sin\tau_1 \sin\Delta u),\\ \cos z &= \sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi \cos\delta_2 (\cos\tau_2 \cos\Delta u - \sin\tau_2 \sin\Delta u).\end{aligned}\right\} \quad \text{(V; 15)}$$

Subtrahiert man diese Gleichungen von einander und dividiert durch $\sin\varphi$, so erhält man

$$\begin{aligned}\sin\delta_2 - \sin\delta_1 = \operatorname{ctg}\varphi \cos\Delta u (\cos\delta_1 \cos\tau_1 - \cos\delta_2 \cos\tau_2) -\\ - \operatorname{ctg}\varphi \sin\Delta u (\cos\delta_1 \sin\tau_1 - \cos\delta_2 \sin\tau_2).\end{aligned}$$

Führt man dasselbe für ein zweites Sternpaar (S_3, S_4) aus, das in der gemeinsamen Zenitdistanz z' beobachtet werde, so entsteht eine entsprechende Gleichung. Setzt man

$$\begin{aligned} a &= \cos\delta_1 \cos\tau_1 - \cos\delta_2 \cos\tau_2, & a' &= \cos\delta_3 \cos\tau_3 - \cos\delta_4 \cos\tau_4,\\ b &= -\cos\delta_1 \sin\tau_1 + \cos\delta_2 \sin\tau_2, & b' &= -\cos\delta_3 \sin\tau_3 + \cos\delta_4 \sin\tau_4,\\ c &= \sin\delta_2 - \sin\delta_1, & c' &= \sin\delta_4 - \sin\delta_3,\end{aligned}$$

und schließlich

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \operatorname{ctg}\varphi \cos\Delta u,\\ \eta &= \operatorname{ctg}\varphi \sin\Delta u.\end{aligned}\right\} \quad \text{(V; 16)}$$

so nehmen diese Gleichungen die Form

$$\begin{aligned} a\xi + b\eta &= c,\\ a'\xi + b'\eta &= c'\end{aligned}$$

an. Die Unbekannten ξ, η dieser linearen Gleichungen liefern nach (V; 16) die gesuchten Größen Δu, φ.

Damit ist das Problem auf die einfachste Weise gelöst, und es ist nur noch nötig, durch Differentialbetrachtungen die günstigsten Beobachtungsbedingungen aufzusuchen. Zerlegt man den Fehler dz_i der beobachteten Zenitdistanz z (bzw. z') in den zu eliminierenden Fehler dz (bzw. dz') des Almukantarats und den Einstellfehler df_i auf den Horizontfaden (auf den, wie früher, auch ein etwaiger Ablesefehler der Uhrzeit geworfen werden kann), so folgt gemäß (V; 4)

$$\left.\begin{aligned} dz_1 &= dz + df_1 = \cos A_1\, d\varphi + \sin A_1 \cos\varphi\, d\Delta u,\\ dz_2 &= dz + df_2 = \cos A_2\, d\varphi + \sin A_2 \cos\varphi\, d\Delta u,\\ dz_3 &= dz' + df_3 = \cos A_3\, d\varphi + \sin A_3 \cos\varphi\, d\Delta u,\\ dz_4 &= dz' + df_4 = \cos A_4\, d\varphi + \sin A_4 \cos\varphi\, d\Delta u.\end{aligned}\right\} \quad \text{(V; 17)}$$

Bilden wir, um dz und dz' zu eliminieren, die Differenzen der beiden ersten und der beiden letzten dieser Gleichungen, so ergeben sich zur Bestimmung von $d\varphi$ und $\cos\varphi\, d\Delta u$ die linearen Gleichungen

$$d\varphi\,(\cos A_1 - \cos A_2) + \cos\varphi\, d\Delta u\,(\sin A_1 - \sin A_2) = df_1 - df_2,$$

$$d\varphi\,(\cos A_3 - \cos A_4) + \cos\varphi\, d\Delta u\,(\sin A_3 - \sin A_4) = df_3 - df_4$$

oder

$$d\varphi \sin\frac{A_1+A_2}{2} - \cos\varphi\, d\Delta u \cos\frac{A_1+A_2}{2} = \frac{df_1 - df_2}{2\sin\frac{A_2-A_1}{2}},$$

$$d\varphi \sin\frac{A_3+A_4}{2} - \cos\varphi\, d\Delta u \cos\frac{A_3+A_4}{2} = \frac{df_3 - df_4}{2\sin\frac{A_4-A_3}{2}}$$

mit den Lösungen

$$d\varphi \sin\frac{A_1+A_2-A_3-A_4}{2} = \frac{df_1-df_2}{2}\,\frac{\cos\frac{A_3+A_4}{2}}{\sin\frac{A_2-A_1}{2}} - \frac{df_3-df_4}{2}\,\frac{\cos\frac{A_1+A_2}{2}}{\sin\frac{A_4-A_3}{2}},$$

$$\cos\varphi\, d\Delta u \sin\frac{A_1+A_2-A_3-A_4}{2} =$$

$$= \frac{df_1-df_2}{2}\,\frac{\sin\frac{A_3+A_4}{2}}{\sin\frac{A_2-A_1}{2}} - \frac{df_3-df_4}{2}\,\frac{\sin\frac{A_1+A_2}{2}}{\sin\frac{A_4-A_3}{2}}.$$

Geben wir den Beobachtungen gleiche Genauigkeit und bezeichnen wir mit ε den mittleren Einstellungsfehler, so ergeben sich die mittleren Fehler $d\varphi$ und $d\Delta u$ der Polhöhe bzw. Uhrkorrektion nach Anhang D IV aus

$$\varepsilon_\varphi^2 \sin^2\frac{A_1+A_2-A_3-A_4}{2} = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{A_3+A_4}{2}}{\sin^2\frac{A_2-A_1}{2}} + \frac{\cos^2\frac{A_1+A_2}{2}}{\sin^2\frac{A_4-A_3}{2}}\right),$$

$$\cos^2\varphi\,\varepsilon_{\Delta u}^2 \sin^2\frac{A_1+A_2-A_3-A_4}{2} = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\sin^2\frac{A_3+A_4}{2}}{\sin^2\frac{A_2-A_1}{2}} + \frac{\sin^2\frac{A_1+A_2}{2}}{\sin^2\frac{A_4-A_3}{2}}\right).$$

Es wird also der mittlere Fehler des Zenits (vgl. Abschn. 38, Abb. 35)

$$\varepsilon_\sigma = \sqrt{\varepsilon_\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\varepsilon_{\Delta u}^2} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sin\frac{A_1 + A_2 - A_3 - A_4}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{A_2 - A_1}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{A_4 - A_3}{2}}}\,.$$

Das Minimum des mittleren Zenitfehlers tritt ein, wenn die drei Sinusausdrücke rechts gleichzeitig extreme Werte annehmen. Von den vier Azimuten ist also eines, etwa A_1, willkürlich, und man erhält für die anderen drei die Bedingungen

$$A_2 = A_1 \pm \pi;\quad A_4 = A_3 \pm \pi;\quad A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = 2\,(A_1 - A_3) = \pm\,\pi.$$

Mit anderen Worten: Jedes der beiden Sternpaare soll möglichst auf dem gleichen Vertikal, aber zu verschiedenen Seiten vom Zenit beobachtet werden, und die beiden Vertikale sollen möglichst einen rechten Winkel miteinander bilden. Unter diesen Bedingungen wird $\varepsilon_\sigma = \varepsilon$. Die beiden Zenitdistanzen z und z' sind beliebig; sie können auch einander gleich gewählt werden.

43. Das Dreihöhenproblem

In dem zuletzt angedeuteten Spezialfall des im vorigen Abschnitt behandelten Problems — Gleichheit aller Zenitdistanzen — ist eine der vier Beobachtungen überflüssig, da sich die Elimination von z dann auch schon aus drei Gleichungen von der Form (V; 15) durchführen läßt. Diese drei Gleichungen haben, wenn man sie durch $\cos z$ dividiert, die Form:

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta = 1 \qquad (i = 1, 2, 3)\,, \qquad \text{(V; 18)}$$

mit den bekannten Koeffizienten

$$a_i = \cos\delta_i\cos\tau_i,\quad b_i = \cos\delta_i\sin\tau_i,\quad c_i = \sin\delta_i$$

und den Unbekannten

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \cos\varphi\cos\Delta u\sec z,\\ \eta &= -\cos\varphi\sin\Delta u\sec z,\\ \zeta &= \sin\varphi\sec z, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V; 19)}$$

aus denen man unmittelbar φ, Δu und, wenn man will, auch die gemeinsame Zenitdistanz z der drei Sterne gewinnt.[1]

Um die Einflüsse der Beobachtungsfehler zu untersuchen, benutzen wir drei Gleichungen von der Form (V; 17)

$$df_i = -\,dz + \cos A_i d\varphi + \sin A_i\cos\varphi\,d\Delta u, \qquad \text{(V; 20)}$$

[1] Ist z die so berechnete, z' die am Kreis abgelesene Zenitdistanz, so ist $\Delta z = z - z'$ die „Index- oder Nullpunktskorrektion" des Kreises.

aus denen die Fehler dz, $d\varphi$, $\cos\varphi\, d\Delta u$ als lineare Funktionen von df_1, df_2, df_3 hervorgehen. Ist

$$\Delta = \sin(A_2 - A_3) + \sin(A_3 - A_1) + \sin(A_1 - A_2)$$

die Hauptdeterminante des Gleichungssystems, die man nach Anhang B IV auch in der Form

$$\Delta = 4 \sin\frac{A_3 - A_2}{2} \sin\frac{A_1 - A_3}{2} \sin\frac{A_2 - A_1}{2}$$

schreiben kann, so erhält man

$$\Delta \cdot dz = 2 \sum_{i,j,k} df_i \sin\frac{A_k - A_j}{2} \cos\frac{A_k - A_j}{2},$$

$$\Delta \cdot d\varphi = 2 \sum_{i,j,k} df_i \sin\frac{A_k - A_j}{2} \cos\frac{A_k + A_j}{2},$$

$$\Delta \cdot \cos\varphi\, d\Delta u = 2 \sum_{i,j,k} df_i \sin\frac{A_k - A_j}{2} \sin\frac{A_k + A_j}{2},$$

wenn man in den Summen i, j, k die drei zyklischen Permutationen der Indexfolge 1, 2, 3 durchlaufen läßt. Bezeichnet man wie früher mit ε den mittleren Einstellungsfehler auf den Horizontalfaden, mit ε_z den mittleren Fehler der Zenitdistanz z bzw. der Indexkorrektion des Kreises und mit

$$\varepsilon_\sigma = \sqrt{\varepsilon_\varphi{}^2 + \cos^2\varphi\, \varepsilon^2{}_{\Delta u}}$$

den mittleren Zenitfehler, so ist nach Anhang D IV:

$$\varepsilon_z^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{i,j,k} \frac{\cos^2\frac{A_k - A_j}{2}}{\sin^2\frac{A_k - A_i}{2} \sin^2\frac{A_j - A_i}{2}},$$

$$\varepsilon_\sigma^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{i,j,k} \frac{1}{\sin^2\frac{A_k - A_i}{2} \sin^2\frac{A_j - A_i}{2}}.$$

Das Fehlerminimum des Zenits, auf das es hier zunächst ankommt, tritt offensichtlich ein, wenn die Differenzen $A_k - A_j$, absolut genommen, möglichst groß sind, d. h. wenn die Azimute der drei Sterne um je 120° auseinander liegen. In diesem Falle wird

$$\sin^2\frac{A_k - A_j}{2} = \frac{3}{4}, \qquad \cos^2\frac{A_k - A_j}{2} = \frac{1}{4}$$

und daher

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \qquad \varepsilon_\sigma = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

44. Das Dreihöhenproblem. Lösung von CAGNOLI

Die im vorigen Abschnitt beschriebene Lösung des Dreihöhenproblems, die an Einfachheit, Eleganz und Symmetrie nichts zu wünschen übrig läßt, wurde von P. HARZER vorgeschlagen. Von älteren Lösungen derselben Aufgabe sind die von CAGNOLI (Ende des 18. Jahrhunderts) und von C. F. GAUSS (1808) bemerkenswert.

Die Lösung von CAGNOLI fußt auf geometrischen Überlegungen und benutzt die *parallaktischen Winkel* p_i der drei Sterne als Hilfsgrößen.

Die drei Sterne mögen durch die Indizes i, j, k bezeichnet werden, deren zyklisch vertauschbare Reihenfolge die der wachsenden Stundenwinkel sein soll. Abb. 41 enthält die zwischen Pol, Zenit und den beiden Sternörtern S_j, S_k bestehenden sphärischen Dreiecke. Die Dreiecke ZS_jS_k sind gleichseitig, da ja die Zenitdistanzen einander gleich sein sollen. Die Basiswinkel mögen mit q_i bezeichnet werden. Ferner seien p_i die parallaktischen Winkel in den Nautischen Dreiecken PZS_i. In den Dreiecken PS_jS_k sind dann die Winkel bei den Sternen $\gamma_i = q_i - p_j$ (bei S_j) und $\beta_i = q_i + p_k$ (bei S_k).

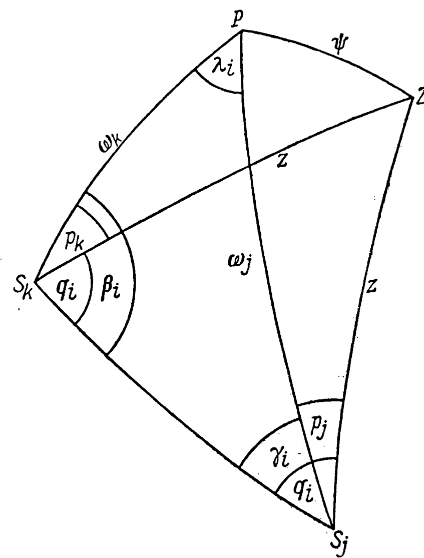


Abb. 41: Dreihöhenproblem nach CAGNOLI

Nach Anhang A V (10) ist für die Dreiecke PS_jS_k:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_i-\gamma_i}{2} = \operatorname{tg}\frac{p_j+p_k}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\lambda_i}{2}\,\frac{\sin\dfrac{\delta_k-\delta_j}{2}}{\cos\dfrac{\delta_k+\delta_j}{2}}\,.$$

Damit sind die Größen

$$s_i = p_j + p_k$$

bestimmt, aber auch die p_i selbst, denn es ist offenbar

$$s = \frac{1}{2}(s_i + s_j + s_k) = p_i + p_j + p_k = p_i + s_i\,,$$

also

$$p_i = s - s_i\,.$$

Aus den Nautischen Dreiecken PZS_i folgt ferner, wenn t_i der Stundenwinkel von S_i ist, nach dem Sinussatz:

$$\sin z \sin p_i = \cos\varphi \sin t_i$$

oder, wenn wir die für das ganze Problem konstante Größe

$$k = \frac{\sin z}{\cos \varphi}$$

einführen:

$$\sin t_i = k \sin p_i. \qquad \text{(V; 21)}$$

Es ist dann

$$\frac{\sin t_k + \sin t_j}{\sin t_k - \sin t_j} = \frac{\sin p_k + \sin p_j}{\sin p_k - \sin p_j}$$

oder, nach Umformung,

$$\operatorname{tg} \frac{t_k + t_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{t_k - t_j}{2} = \operatorname{tg} \frac{p_k + p_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{p_k - p_j}{2}.$$

Da nun die Größen $t_k - t_j = u_k - u_j = \lambda_i$ bekannt sind, ergibt sich für

$$\frac{t_k + t_j}{2} = \frac{u_k + u_j}{2} - \frac{\alpha_k + \alpha_j}{2} + \Delta u$$

die Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{t_k + t_j}{2} = \operatorname{tg} \frac{\lambda_i}{2} \operatorname{tg} \frac{s_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{p_k - p_j}{2}, \qquad \text{(V; 22)}$$

aus der (und zwar wegen der zyklischen Vertauschbarkeit der Indizes auf drei Arten) die Uhrkorrektion Δu folgt.

Nunmehr sind auch die drei Stundenwinkel t_i bekannt, und man findet die Polhöhe φ aus einem der Nautischen Dreiecke PZS_i. Benutzt man hierbei (was für die logarithmische Rechnung empfehlenswert ist) die Gaussschen Gleichungen [Anhang A IV (9)], so erhält man, wenn man die Poldistanzen der Sterne $\tilde{\omega}_i = \frac{\pi}{2} - \delta_i$ und die Poldistanz des Zenits $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ einführt, die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
\sin \frac{A_i}{2} \cos \frac{\psi - z}{2} &= \cos \frac{\tilde{\omega}_i}{2} \sin \frac{p_i + t_i}{2}, \\
\cos \frac{A_i}{2} \cos \frac{\psi + z}{2} &= \cos \frac{\tilde{\omega}_i}{2} \cos \frac{p_i + t_i}{2}, \\
\sin \frac{A_i}{2} \sin \frac{\psi - z}{2} &= \sin \frac{\tilde{\omega}_i}{2} \sin \frac{p_i - t_i}{2}, \\
\cos \frac{A_i}{2} \sin \frac{\psi + z}{2} &= \sin \frac{\tilde{\omega}_i}{2} \cos \frac{p_i - t_i}{2},
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V; 23)}$$

aus denen man neben $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ auch die gemeinsame Zenitdistanz z der Sterne sowie ihre Azimute A_i ableiten kann. Das ergibt wertvolle Kontrollen der Rechnung, wenn man ein Universalinstrument benutzt, an dessen

Kreisen man die Zenitdistanzen und Azimute (oder wenigstens, wenn der Azimutkreis nicht berichtigt ist, die Differenzen der Azimute) ablesen kann. Andererseits ergibt sich hier die Möglichkeit, die Indexkorrektionen der beiden Kreise zu bestimmen, indem man die berechneten mit den abgelesenen Größen z, A_i vergleicht.

Man kann die Gleichungen (V; 22) und (V; 23) je dreimal anwenden, indem man der Indexfolge i, j, k die Werte (1, 2, 3), (2, 3, 1) oder (3, 1, 2) zuschreibt. Die Gleichheit der Ergebnisse Δu, φ, z bedeutet eine weitere wichtige Rechnungskontrolle.

P. Harzer hat einen sehr hübschen Weg gefunden, um die drei Gleichungen (V; 22) durch eine einzige völlig symmetrische Formel zur Berechnung von Δu zu ersetzen. Er bezeichnet mit

$$t = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) = \frac{1}{3}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) + \Delta u$$

das arithmetische Mittel der drei Stundenwinkel. Es sei ferner

$$t_i = t + \mu_i, \qquad \text{(V; 24)}$$

wobei

$$\mu_i = \frac{2t_i - t_j - t_k}{3} = \frac{(t_i - t_k) - (t_j - t_i)}{3} = \frac{\lambda_j - \lambda_k}{3}$$

drei bekannte Größen sind, deren Summe gleich null ist. Man setze nun

$$f_i = \frac{\sin \mu_i}{\sin p_i}, \qquad g_i = \frac{\cos \mu_i}{\sin p_i}; \qquad \text{(V; 25)}$$

dann ist wegen (V; 21)

$$f_k - f_j = k\left(\frac{\sin \mu_k}{\sin t_k} - \frac{\sin \mu_j}{\sin t_j}\right)$$

oder, wenn man (V; 24) berücksichtigt, nach einfacher Reduktion

$$f_k - f_j = k\frac{\sin t \sin(\mu_k - \mu_j)}{\sin t_j \sin t_k} = k\frac{\sin t \sin \lambda_i}{\sin t_j \sin t_k}. \qquad \text{(V; 26)}$$

Genauso ergibt sich

$$g_k - g_j = -k\frac{\cos t \sin \lambda_i}{\sin t_j \sin t_k} \qquad \text{(V; 27)}$$

und damit, wenn man (V; 26) durch (V; 27) dividiert,

$$\operatorname{tg} t = -\frac{f_k - f_j}{g_k - g_j}. \qquad \text{(V; 28)}$$

Diesen unsymmetrischen Ausdruck verwandelt man in einen symmetrischen, indem man die drei Gleichungen (V; 28), die sich durch Indexvertauschung ergeben, miteinander multipliziert:

$$\operatorname{tg}^3 t = -\frac{(f_k-f_j)(f_i-f_k)(f_j-f_i)}{(g_k-g_j)(g_i-g_k)(g_j-g_i)} = -\frac{\sum f_i^2 (f_k-f_j)}{\sum g_i^2 (g_k-g_j)},$$

wobei die Summen wieder über die drei zyklischen Permutationen von i, j, k zu erstrecken sind. Setzt man rechts im Zähler nach (V; 28)

$$f_k - f_j = -(g_k - g_j)\operatorname{tg} t,$$

so tritt der Faktor $\operatorname{tg} t$ vor die Summe im Zähler, und man erhält:

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sum f_i^2 (g_k-g_j)}{\sum g_i^2 (g_k-g_j)}. \qquad \text{(V; 29)}$$

Setzt man (V; 25), (V; 27) ein und multipliziert noch den Faktor

$$k\frac{\sin p_i}{\sin t_i} = 1$$

hinzu, so ergibt sich

$$f_i^2 (g_k-g_i) = -\frac{k^2 \cos t}{\sin t_i \sin t_j \sin t_k}\cdot\frac{\sin\lambda_i}{\sin p_i}\sin^2\mu_i,$$

$$g_i^2 (g_k-g_i) = -\frac{k^2 \cos t}{\sin t_i \sin t_j \sin t_k}\cdot\frac{\sin\lambda_i}{\sin p_i}\cos^2\mu_i$$

oder, da das Produkt $\sin t_i \sin t_j \sin t_k$ gegen Indexvertauschung invariant ist und daher mit $k^2 \cos t$ bei der Bildung von (V; 29) vor die Summen tritt und sich heraushebt,

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sum \frac{\sin\lambda_i}{\sin p_i}\sin^2\mu_i}{\sum \frac{\sin\lambda_i}{\sin p_i}\cos^2\mu_i}$$

als völlig symmetrische Formel zur Bestimmung von t.

45. Das Dreihöhenproblem. Lösung von GAUSS

C. F. Gauss gibt (Werke, Band IV, pag. 129) folgende Lösung des Dreihöhenproblems an: Für die Sterne S_j, S_k gelten, wenn man

$$\lambda_i = t_k - t_j, \text{ also } t_j = t_i + \lambda_k,\ t_k = t_i - \lambda_j$$

einführt, bei gleicher Zenitdistanz z die Grundformeln

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta_j + \cos\varphi\cos\delta_j\cos(t_i + \lambda_k),$$

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta_k + \cos\varphi\cos\delta_k\cos(t_i - \lambda_j);$$

wenn man also z durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen eliminiert, gilt

$$0 = \sin\varphi\,(\sin\delta_k - \sin\delta_j) + \cos\varphi\,[\cos\delta_k\cos(t_i - \lambda_j) - \cos\delta_j\cos(t_i + \lambda_k)].$$

Setzt man hierin

$$\cos\delta_k = \cos\left(\frac{\delta_k+\delta_j}{2} + \frac{\delta_k-\delta_j}{2}\right), \quad \cos\delta_j = \cos\left(\frac{\delta_k+\delta_j}{2} - \frac{\delta_k-\delta_j}{2}\right)$$

und löst diese Ausdrücke auf, so ergibt sich

$$\sin\varphi\,(\sin\delta_k - \sin\delta_j) + \cos\varphi\cos\frac{\delta_k+\delta_j}{2}\cos\frac{\delta_k-\delta_j}{2}[\cos(t_i-\lambda_j) - \cos(t_i+\lambda_k)]$$
$$= \cos\varphi\sin\frac{\delta_k+\delta_j}{2}\sin\frac{\delta_k-\delta_j}{2}[\cos(t_i-\lambda_j) + \cos(t_i+\lambda_k)].$$

Setzt man ferner

$$\sin\delta_k - \sin\delta_j = 2\sin\frac{\delta_k-\delta_j}{2}\cos\frac{\delta_k+\delta_j}{2},$$

$$\cos(t_i-\lambda_j) - \cos(t_i+\lambda_k) = 2\sin\left(t_i + \frac{\lambda_k-\lambda_j}{2}\right)\sin\frac{\lambda_k+\lambda_j}{2},$$

$$\cos(t_i-\lambda_j) + \cos(t_i+\lambda_k) = 2\cos\left(t_i + \frac{\lambda_k-\lambda_j}{2}\right)\cos\frac{\lambda_k+\lambda_j}{2},$$

beachtet, daß wegen $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = 0$ auch $\frac{\lambda_k+\lambda_j}{2} = -\frac{\lambda_i}{2}$ gesetzt werden kann, und dividiert schließlich die Gleichung durch

$$2\cos\varphi\sin\frac{\delta_k-\delta_j}{2}\cos\frac{\delta_k+\delta_j}{2},$$

so erhält man

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\frac{\delta_k-\delta_j}{2}\sin\frac{\lambda_i}{2}\sin\left(t_i+\frac{\lambda_k-\lambda_j}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{\delta_k+\delta_j}{2}\cos\frac{\lambda_i}{2}\cos\left(t_i+\frac{\lambda_k-\lambda_j}{2}\right).$$

Führt man die Hilfsgrößen A_i, B_i durch

$$\left.\begin{aligned} A_i\sin B_i &= -\operatorname{ctg}\frac{\delta_k-\delta_j}{2}\sin\frac{\lambda_i}{2}, \\ A_i\cos B_i &= \quad\operatorname{tg}\frac{\delta_k+\delta_j}{2}\cos\frac{\lambda_i}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (V;30)$$

ein, so wird

$$\operatorname{tg}\varphi = A_i\cos\left(B_i + t_i + \frac{\lambda_k-\lambda_j}{2}\right)$$

10*

oder, wenn man noch zur Abkürzung

$$C_i = B_i + \frac{\lambda_k - \lambda_j}{2}$$

setzt, schließlich

$$\operatorname{tg} \varphi = A_i \cos (t_i + C_i) . \qquad \text{(V; 31)}$$

Man kann nun t_i bestimmen, indem man φ aus den beiden Gleichungen (V; 31)

$$\operatorname{tg} \varphi = A_j \cos (t_j + C_j) = A_k \cos (t_k + C_k)$$

eliminiert. Es ist nämlich

$$t_j + C_j = t_i + \lambda_k + B_j + \frac{\lambda_i - \lambda_k}{2} = t_i + B_j + \frac{\lambda_i + \lambda_k}{2} = t_i + B_j - \frac{\lambda_j}{2} ,$$

$$t_k + C_k = t_i - \lambda_j + B_k + \frac{\lambda_j - \lambda_i}{2} = t_i + B_k - \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} = t_i + B_k + \frac{\lambda_k}{2} ,$$

also

$$A_j \left[\cos t_i \cos \left(B_j - \frac{\lambda_j}{2} \right) - \sin t_i \sin \left(B_j - \frac{\lambda_j}{2} \right) \right] =$$

$$= A_k \left[\cos t_i \cos \left(B_k + \frac{\lambda_k}{2} \right) - \sin t_i \sin \left(B_k + \frac{\lambda_k}{2} \right) \right] .$$

Hieraus ergibt sich, wenn man noch

$$A_k = A_j \operatorname{tg} \zeta_i$$

setzt,

$$\operatorname{tg} t_i = \frac{\cos \left(B_j - \frac{\lambda_j}{2} \right) - \operatorname{tg} \zeta_i \cos \left(B_k + \frac{\lambda_k}{2} \right)}{\sin \left(B_j - \frac{\lambda_j}{2} \right) - \operatorname{tg} \zeta_i \sin \left(B_k + \frac{\lambda_k}{2} \right)} . \qquad \text{(V; 32)}$$

Das Formelsystem (V; 30), (V; 32), (V; 31) löst das Problem vollständig, und zwar wieder auf drei möglichen Wegen, die sich durch zyklische Vertauschung der Indizes i, j, k ergeben, und die sich gegenseitig kontrollieren. (V; 32) ist etwas unbequem, läßt sich aber leicht auf eine für logarithmische Rechnung geeignete Form bringen:

Setzt man zur Abkürzung

$$D_j = B_j - \frac{\lambda_j}{2} , \quad D_k = B_k + \frac{\lambda_k}{2} , \quad D_i = \frac{D_j + D_k}{2} , \qquad \text{(V; 33)}$$

so ist

$$\operatorname{tg}(t_i + D_i) = \frac{\operatorname{tg} t_i + \operatorname{tg} D_i}{1 - \operatorname{tg} t_i \operatorname{tg} D_i} =$$

$$= \frac{(\cos D_j - \operatorname{tg}\zeta_i \cos D_k)\cos D_i + (\sin D_j - \operatorname{tg}\zeta_i \sin D_k)\sin D_i}{(\sin D_j - \operatorname{tg}\zeta_i \sin D_k)\cos D_i - (\cos D_i - \operatorname{tg}\zeta_i \cos D_k)\sin D_i} =$$

$$= \frac{\cos(D_j - D_i) - \operatorname{tg}\zeta_i \cos(D_i - D_k)}{\sin(D_j - D_i) + \operatorname{tg}\zeta_i \sin(D_i - D_k)}.$$

Nun ist aber $D_j - D_i = D_i - D_k = \frac{D_j - D_k}{2}$, also

$$\operatorname{tg}(t_i + D_i) = \operatorname{ctg}\frac{D_j - D_k}{2}\,\frac{1 - \operatorname{tg}\zeta_i}{1 + \operatorname{tg}\zeta_i} = \operatorname{ctg}\frac{D_j - D_k}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \zeta_i\right), \qquad (V; 34)$$

so daß (V; 33), (V; 34) an Stelle von (V; 32) treten.

46. Das allgemeine Dreihöhenproblem. Lösung von WILKENS

Es ist nicht immer leicht, besonders wenn man sich auf hellere Sterne beschränken muß, Gruppen von drei Sternen zu finden, die in angemessenen Zeitabständen und in möglichst verschiedenen Azimuten durch die gleiche Zenitdistanz gehen. Es verdienen daher auch diejenigen Methoden Beachtung, die sich der Messung dreier beliebiger Zenitdistanzen bedienen. Hierbei werden zwar die Zenitdistanzen am Kreise des Instruments abgelesen, aber es werden nur ihre Differenzen verwertet, so daß der Zenitpunktsfehler (Indexfehler) des Kreises nicht bekannt zu sein braucht, bzw. auf Grund der Beobachtungen mitbestimmt wird. Wir wollen diese Aufgabe das *allgemeine Dreihöhenproblem* nennen. Im Sonderfall können auch die Unterschiede der drei Zenitdistanzen geringfügig sein. Sie werden dann bei in Höhe geklemmtem Instrument mittels Libelle und Feinbewegung oder mit dem horizontalen Meßfaden eines Mikrometers bestimmt — der Kreis braucht in diesem Falle nicht abgelesen zu werden.

Die Differentialbeziehungen (V; 20) behalten auch für das allgemeine Problem Gültigkeit, wenn wir den Fehler $dz = d\Delta z$ als „Fehler der Bestimmung der Indexkorrektion des Höhenkreises" allen abgelesenen Zenitdistanzen gemeinsam zuschreiben. Die drei Sterne sollen also möglichst in drei gleichmäßig verteilten, d. h. jeweils um etwa 120° auseinanderliegenden Azimuten beobachtet werden, während die Zenitdistanzen beliebig sein dürfen. Der Beobachter wird trotzdem Wert darauf legen, daß die Unterschiede der Zenitdistanzen nicht groß sind, damit der Genauigkeitsgrad der einzelnen Beobachtungen möglichst derselbe ist (große Zenitdistanzen sind wegen der Refraktion und der Bildbeschaffenheit weniger genau als kleine!).

A. WILKENS[1]) hat folgende geometrische Lösung des allgemeinen Dreihöhenproblems angegeben, in der die *parallaktischen Winkel* als Hilfsgrößen benutzt werden. Die Lösung ist unsymmetrisch, da die Beobachtung eines der drei Sterne (etwa die von S_1) in der Rechnung bevorzugt wird. Die Zenitdistanzen und Stundenwinkel der drei Sterne seien

$$z_1, \quad z_2 = z_1 + \zeta_2, \quad z_3 = z_1 + \zeta_3,$$
$$t_1, \quad t_2 = t_1 + \lambda_2, \quad t_3 = t_1 + \lambda_3.$$

Die Differenzen ζ_2, ζ_3; λ_2, λ_3 sind bekannt, die Unbekannten des Problems sind z_1, t_1, φ; z_1 enthält die Indexkorrektion des Kreises, t_1 die Uhrkorrektion.

Für die Sterne S_2, S_3 gilt dann nach (II; 23)

$$\cos(z_1 + \zeta_i) = \sin\varphi \sin\delta_i + \cos\varphi \cos\delta_i \cos(t_1 + \lambda_i) \qquad (i = 2, 3). \tag{V; 35}$$

Im Nautischen Dreieck PZS_1 des ersten Sternes gelten die Grundformeln

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \cos z_1 \sin\delta_1 + \sin z_1 \cos\delta_1 \cos p_1, \\ \cos\varphi \cos t_1 &= \cos z_1 \cos\delta_1 - \sin z_1 \sin\delta_1 \cos p_1, \\ \cos\varphi \sin t_1 &= \sin z_1 \sin p_1. \end{aligned}\right\} \tag{V; 36}$$

Setzt man dies in (V; 35) ein, nachdem man die cos-Ausdrücke aufgelöst hat, und ordnet nach Funktionen von z_1, so erhält man

$$\begin{aligned} \cos z_1 [\cos\zeta_i - (\sin\delta_1 \sin\delta_i + \cos\delta_1 \cos\delta_i \cos\lambda_i)] = \\ = \sin z_1 [\sin\zeta_i + (\cos\delta_1 \sin\delta_i - \sin\delta_1 \cos\delta_i \cos\lambda_i) \cos p_1 - \\ - \cos\delta_i \sin\lambda_i \sin p_1]. \end{aligned} \tag{V; 37}$$

Nun ist, wenn wir (Abb. 42) im Dreieck PS_1S_i den Winkel bei S_1 mit s_i und die Seite S_1S_i mit σ_i bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} \cos\sigma_i &= \sin\delta_1 \sin\delta_i + \cos\delta_1 \cos\delta_i \cos\lambda_i, \\ \sin\sigma_i \cos s_i &= \cos\delta_1 \sin\delta_i - \sin\delta_1 \cos\delta_i \cos\lambda_i, \\ \sin\sigma_i \sin s_i &= \cos\delta_i \sin\lambda_i. \end{aligned}\right\} \tag{V; 38}$$

Damit vereinfacht sich (V; 37), und man erhält mit $i = 2, 3$

$$\operatorname{tg} z_1 = \frac{\cos\zeta_i - \cos\sigma_i}{\sin\zeta_i + \sin\sigma_i \cos(p_1 + s_i)}. \tag{V; 39}$$

[1]) A. WILKENS: Über die Verallgemeinerungen des GAUSSschen Dreihöhenproblems. Astron. Nachr. 191, 361.

Setzt man diese beiden Ausdrücke für $\operatorname{tg} z_1$ gleich, schafft die Nenner fort und ordnet nach Funktionen von p_1, so ergibt sich die Gleichung

$$a \cos p_1 + b \sin p_1 = c$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a &= \sin\sigma_3 \cos s_3 (\cos\zeta_2 - \cos\sigma_2) - \sin\sigma_2 \cos s_2 (\cos\zeta_3 - \cos\sigma_3), \\ b &= -\sin\sigma_3 \sin s_3 (\cos\zeta_2 - \cos\sigma_2) + \sin\sigma_2 \sin s_2 (\cos\zeta_3 - \cos\sigma_3), \\ c &= -\sin\zeta_3 (\cos\zeta_2 - \cos\sigma_2) + \sin\zeta_2 (\cos\zeta_3 - \cos\sigma_3), \end{aligned}\right\} \quad (V;40)$$

die nach den in Anhang C beschriebenen Methoden aufgelöst werden kann.

Der Rechnungsgang ist also folgender: Man bestimmt aus den Gleichungssystemen (V; 38) σ_2, s_2; σ_3, s_3, dann p_1 aus (V; 40), z_1 aus einer der Gleichungen (V; 39), die sich gegenseitig kontrollieren, und schließlich φ und t_1 aus (V; 36).

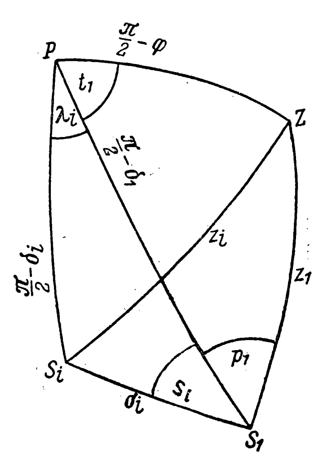


Abb. 42: Dreihöhenproblem nach WILKENS

47. Das allgemeine Dreihöhenproblem. Lösung von HARZER-PLUMMER

Eine algebraische Lösung des allgemeinen Dreihöhenproblems, die sich durch mathematische Eleganz und Symmetrie auszeichnet, wurde von P. HARZER[1]) gegeben. Es seien z_i ($i = 1, 2, 3$) die Zenitdistanzen der beobachteten Sterne und

$$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

ihr arithmetisches Mittel, dessen Wert unbekannt ist, da es den Indexfehler des Kreises enthält. Setzen wir

$$z_i = z + \varepsilon_i, \quad (V;41)$$

so sind die ε_i aus den Differenzen der Kreisablesungen bekannt, denn es ist ja

$$\varepsilon_i = z_i - \frac{1}{3}(z_i + z_j + z_k) = \frac{1}{3}[(z_i - z_j) + (z_i - z_k)].$$

Für die drei Sterne gelten drei Gleichungen von der Form (V; 15), wenn links statt z die verschiedenen Werte z_i gesetzt werden. Es ist also, wenn wir (V; 41) einsetzen,

$$\cos(z + \varepsilon_i) = \sin\varphi \sin\delta_i + \cos\varphi \cos\delta_i (\cos\tau_i \cos\Delta u - \sin\tau_i \sin\Delta u).$$

[1]) P. HARZER: Über das Dreihöhenproblem. Astron. Nachr. 192, 107.

Werden nun die Bezeichnungen (V; 19) eingeführt, so ergeben sich die Gleichungen

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta = h_i, \qquad \text{(V; 42)}$$

mit

$$h_i = \cos(z + \varepsilon_i)\sec z = \cos\varepsilon_i - \operatorname{tg} z \sin\varepsilon_i. \qquad \text{(V; 43)}$$

Das sind drei lineare Gleichungen für die vier Unbekannten ξ, η, ζ, $\operatorname{tg} z$. Dazu tritt als vierte Gleichung die aus (V; 19) folgende Beziehung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sec^2 z = 1 + \operatorname{tg}^2 z.$$

Das Verfahren besteht darin, ξ, η, ζ zu eliminieren, so daß eine quadratische Gleichung in $\operatorname{tg} z$ allein übrig bleibt. Man bezeichnet diese als die *Schlüsselgleichung* des Problems, da, sobald $\operatorname{tg} z$ bekannt ist, die h_i aus (V; 43) und die übrigen Unbekannten und damit φ, Δu und (als Endkontrolle) $\sec z$ aus den drei linearen Gleichungen (V; 42) unschwer abgeleitet werden können.

Das Eliminationsverfahren läßt sich nach einem Vorschlag von H. C. Plummer[1]) folgendermaßen sehr elegant und durchsichtig ausführen. Die Größen a_i, b_i, c_i (V; 19), für die $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$ gilt, stellen die rechtwinkligen Koordinaten der drei Sternörter (S_i) dar, wenn wir als Koordinatensystem das lokale System des Äquators wählen, aber die a, c-Ebene nicht in den Meridian, sondern in die Ebene des Stundenkreises mit dem Stundenwinkel Δu fallen lassen. Als vierten Punkt der Sphäre fügen wir das *Zenit* hinzu, das in diesem System die Koordinaten

$$a_4 = \cos\varphi\cos\Delta u, \quad b_4 = -\cos\varphi\sin\Delta u, \quad c_4 = \sin\varphi$$

besitzt. Es ist dann die vierreihige Determinante

$$D = |\, a_i, b_i, c_i, 0 \,| = 0.$$

Fassen wir die Zahlentripel a_i, b_i, c_i als Koordinaten von Einheitsvektoren $\mathfrak{p}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) auf, so ist das skalare Produkt von $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$

$$(\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_j) = a_i\,a_j + b_i\,b_j + c_i\,c_j,$$

und es gilt nach dem Multiplikationssatz der Determinanten

$$D^2 = |\,(\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_1),\ (\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_2),\ (\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_3),\ (\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_4)\,| = 0.$$

Da nun $(\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_i) = 1$ und $(\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}_4) = \cos z_i$, ferner

$$(\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3) = \cos\sigma_1, \quad (\mathfrak{p}_3\,\mathfrak{p}_1) = \cos\sigma_2, \quad (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2) = \cos\sigma_3,$$

wenn wir mit σ_i die Bogenlängen der Seiten $S_j\,S_k$ des sphärischen Dreiecks $S_i\,S_j\,S_k$ bezeichnen, so erhalten wir

$$D^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\sigma_3 & \cos\sigma_2 & \cos z_1 \\ \cos\sigma_3 & 1 & \cos\sigma_1 & \cos z_2 \\ \cos\sigma_2 & \cos\sigma_1 & 1 & \cos z_3 \\ \cos z_1 & \cos z_2 & \cos z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[1]) H. C. Plummer: On the Latitude Problem with three Relative Altitudes. Astron. Nachr. 192, 273.

oder, wenn wir noch die vierte Spalte und die vierte Zeile durch $\cos z$ dividieren und (V; 43) berücksichtigen,

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\sigma_3 & \cos\sigma_2 & h_1 \\ \cos\sigma_3 & 1 & \cos\sigma_1 & h_2 \\ \cos\sigma_2 & \cos\sigma_1 & 1 & h_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 & 1+\mathrm{tg}^2 z \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung hat, da die h_i lineare Funktionen von $\mathrm{tg}\, z$ sind, die Form

$$A\,\mathrm{tg}^2 z - 2B\,\mathrm{tg}\, z + C = 0. \tag{V; 44}$$

Die Koeffizienten dieser quadratischen Gleichung lassen sich nach Auflösung der Determinante leicht hinschreiben. Sie stellen symmetrische Ausdrücke in den Größen σ_i, ε_i dar, deren Bildung dem Leser überlassen bleiben. Die Größen $\cos\sigma_i$ berechnet man aus den sphärischen Dreiecken PS_jS_k nach dem Cosinussatz:

$$\cos\sigma_i = a_j a_k + b_j b_k + c_j c_k = \sin\delta_j \sin\delta_k + \cos\delta_j \cos\delta_k \cos(\tau_k - \tau_j).$$

48. Das allgemeine Dreihöhenproblem. Lösung von STUMPFF

Die Koeffizienten der Schlüsselgleichung (V; 44) sind trotz ihrer übersichtlichen und symmetrischen Form für die numerische Rechnung wenig bequem. Der Verfasser[1]) hat versucht, sie nach einem anderen Verfahren abzuleiten, das besonders für den Gebrauch der Rechenmaschine geeignet ist. Gleichzeitig ist bedacht worden, daß die Indexkorrektion des Kreises Δz meist sehr klein ist und es daher zweckmäßig ist, diese Größe (im Hinblick auf die Möglichkeit, rasch konvergente Reihen zu entwickeln) statt des Mittelwertes z direkt als Unbekannte einzuführen.

Man setze also jetzt die Zenitdistanzen der drei Sterne

$$z_i = f_i + \Delta z, \quad (i = 1, 2, 3),$$

wobei f_i die Kreisablesungen bedeuten. Es gilt dann statt (V; 42), (V; 43)

$$a_i\,\xi + b_i\,\eta + c_i\,\zeta = \cos f_i - \mathrm{tg}\,\Delta z \sin f_i, \tag{V; 45}$$

$$\xi = \cos\varphi \cos\Delta u \sec\Delta z,\ \eta = -\cos\varphi \sin\Delta u \sec\Delta z,\ \zeta = \sin\varphi \sec\Delta z, \tag{V; 46}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 + \mathrm{tg}^2 \Delta z. \tag{V; 47}$$

Man bestimme nun die sechs Größen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ aus den beiden linearen Gleichungssystemen

$$\left.\begin{aligned} a_i\,\xi_1 + b_i\,\eta_1 + c_i\,\zeta_1 &= \cos f_i \\ a_i\,\xi_2 + b_i\,\eta_2 + c_i\,\zeta_2 &= \sin f_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3).\right\} \tag{V; 48}$$

[1]) K. STUMPFF: Über das Problem der Ortsbestimmung aus drei relativen Zenitdistanzen oder Azimuten. Astron. Nachr. 277, 145.

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit tg Δz und subtrahiert sie von der ersten, so entsteht das neue System

$$a_i(\xi_1 - \xi_2 \operatorname{tg} \Delta z) + b_i(\eta_1 - \eta_2 \operatorname{tg} \Delta z) + c_i(\zeta_1 - \zeta_2 \operatorname{tg} \Delta z) =$$
$$= \cos f_i - \operatorname{tg} \Delta z \sin f_i,$$

das offenbar mit (V; 45) identisch ist. Es ist also

$$\xi = \xi_1 - \xi_2 \operatorname{tg} \Delta z, \quad \eta = \eta_1 - \eta_2 \operatorname{tg} \Delta z, \quad \zeta = \zeta_1 - \zeta_2 \operatorname{tg} \Delta z. \qquad \text{(V; 49)}$$

Setzt man dies in (V; 47) ein und ordnet nach Potenzen von tg Δz, so erscheint die Schlüsselgleichung in der sehr einfachen Gestalt

$$A \operatorname{tg}^2 \Delta z - 2 B \operatorname{tg} \Delta z + C = 0 \qquad \text{(V; 50)}$$

mit

$$A = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - 1, \quad B = \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2, \quad C = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - 1.$$

Nach ihrer Auflösung erhält man ξ, η, ζ aus (V; 49) und sodann Δu, φ aus (V; 46).

Die Lösung von (V; 50) lautet explizit

$$\operatorname{tg} \Delta z = \frac{B}{A}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{AC}{B^2}}\right].$$

Wenn aber Δz klein ist, was in der Praxis immer zutrifft, so gilt das negative Zeichen vor der Wurzel. Man kann diese nach dem binomischen Satz entwickeln und erhält die Potenzreihe

$$\operatorname{tg} \Delta z = \frac{C}{2B}\left[1 + \frac{AC}{4B^2} + 2\left(\frac{AC}{4B^2}\right)^2 + 5\left(\frac{AC}{4B^2}\right)^3 + \cdots\right], \qquad \text{(V; 51)}$$

die besonders dann gut konvergiert, wenn $AC/4B^2$ klein ist. Ist diese Größe gleich oder nahezu null, so beschränkt sich die Entwicklung praktisch auf das erste Glied.

Diese Bedingung, die eine außerordentliche Vereinfachung der Rechnung mit sich bringt, ist nahezu erfüllt, wenn alle Zenitdistanzen ungefähr gleich sind und um 45° liegen. Das läßt sich folgendermaßen sehr einfach zeigen: Angenommen, es sei $f_1 = f_2 = f_3 = z$. Setzt man dies in (V; 48) ein, bezeichnet mit Δ die gemeinsame Hauptdeterminante der beiden Gleichungssysteme und mit Δ_1, Δ_2, Δ_3 diejenigen Determinanten, die man erhält, wenn man in Δ die erste, zweite bzw. dritte Spalte durch Einsen ersetzt, so ist

$$\Delta\, \xi_1 = \Delta_1 \cos z, \quad \Delta\, \eta_1 = \Delta_2 \cos z, \quad \Delta\, \zeta_1 = \Delta_3 \cos z,$$
$$\Delta\, \xi_2 = \Delta_1 \sin z, \quad \Delta\, \eta_2 = \Delta_2 \sin z, \quad \Delta\, \zeta_2 = \Delta_3 \sin z.$$

Die Koeffizienten der quadratischen Gleichung (V; 50) sind dann

$$A = F^2 \sin^2 z - 1, \quad B = F^2 \sin z \cos z, \quad C = F^2 \cos^2 z - 1,$$

wenn man zur Abkürzung

$$F^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}{\Delta^2}$$

schreibt. Ist das Instrument genau berichtigt, also $\Delta z = 0$, so ist offenbar $C = 0$, andernfalls ist C klein und $F^2 = (1 + C) \sec^2 z$.

Die höheren Glieder von (V; 51) verschwinden, wenn $A = 0$, d. h.

$$\operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{1 + C},$$

also, wie behauptet, für eine Zenitdistanz, die von 45° nur wenig verschieden sein kann.

49. Das Zweiazimutproblem

Die gemeinsame Bestimmung von Ortszeit und Polhöhe gelingt natürlich auch, wenn man statt der Zenitdistanzen Azimute bzw. Durchgänge durch gegebene Vertikale verwendet. Die meisten dieser Methoden führen allerdings auf Formelsysteme, die für den praktischen Gebrauch viel zu kompliziert sind, und erfreuen sich daher einer weitaus geringeren Beliebtheit. Für den Theoretiker sind sie aber interessant, und unsere Darstellung würde eine empfindliche Lücke aufweisen, wenn wir darauf verzichten würden, sie zu beschreiben.

Schon das *Zweiazimutproblem*, also die Aufgabe der Ortsbestimmung aus zwei gemessenen absoluten Azimuten, zeigt die oben genannten Schwierigkeiten in vollem Maße. Wendet man die Grundgleichung (III; 17) auf zwei Sterne ($i = 1,2$) an, so erhält man

$$\sin t_i - \sin \varphi \cos t_i \operatorname{tg} A_i + \cos \varphi \operatorname{tg} \delta_i \operatorname{tg} A_i = 0. \qquad \text{(V; 52)}$$

Setzt man hierin, wie früher, $\tau_i = u_i - \alpha_i$, $t_i = \tau_i + \Delta u$, so ergeben sich, wenn man die trigonometrischen Ausdrücke auflöst und nach Funktionen von Δu ordnet, die Gleichungen

$$\cos \Delta u (\sin \tau_i - \sin \varphi \cos \tau_i \operatorname{tg} A_i) + \sin \Delta u (\cos \tau_i + \sin \varphi \sin \tau_i \operatorname{tg} A_i) +$$
$$+ \cos \varphi \operatorname{tg} \delta_i \operatorname{tg} A_i = 0,$$

aus denen man $\cos \Delta u$, $\sin \Delta u$ als Funktionen von φ berechnen kann. Setzt man, wie üblich, $\lambda = \tau_2 - \tau_1$ und führt die Abkürzungen

$$\beta_i = \operatorname{tg} A_i, \quad \gamma_i = \operatorname{tg} A_i \operatorname{tg} \delta_i, \quad \varepsilon = \operatorname{tg} A_2 - \operatorname{tg} A_1$$

ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} E \cos \Delta u &= (A + B \sin \varphi) \cos \varphi, \\ E \sin \Delta u &= (C + D \sin \varphi) \cos \varphi \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V; 53)}$$

mit

$$A = \gamma_1 \cos \tau_2 - \gamma_2 \cos \tau_1 ,$$
$$B = \beta_2 \gamma_1 \sin \tau_2 - \beta_1 \gamma_2 \sin \tau_1 ,$$
$$C = \gamma_2 \sin \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_2 ,$$
$$D = \beta_2 \gamma_1 \cos \tau_2 - \beta_1 \gamma_2 \cos \tau_1 ,$$
$$E = \sin \lambda - \varepsilon \cos \lambda \sin \varphi + \beta_1 \beta_2 \sin \lambda \sin^2 \varphi .$$

Eliminiert man Δu durch Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen (V; 53) und setzt dabei $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$, so entsteht eine *Gleichung vierten Grades* in $\sin \varphi$:

$$F(\varphi) = a + b \sin \varphi + c \sin^2 \varphi + d \sin^3 \varphi + e \sin^4 \varphi = 0 \qquad \text{(V; 54)}$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} a &= \sin^2 \lambda - \gamma_1^2 + 2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \lambda - \gamma_2^2 , \\ b &= 2 \varepsilon \sin \lambda (\gamma_1 \gamma_2 - \cos \lambda) , \\ c &= \varepsilon^2 \cos^2 \lambda + 2 \beta_1 \beta_2 \sin^2 \lambda + \gamma_1^2 (1 - \beta_2^2) - \\ &\quad - 2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \lambda (1 - \beta_1 \beta_2) + \gamma_2^2 (1 - \beta_1^2) , \\ d &= - 2 \varepsilon \sin \lambda (\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2 \cos \lambda) , \\ e &= \beta_1^2 \beta_2^2 \sin^2 \lambda + \beta_1^2 \gamma_2^2 - 2 \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \lambda + \beta_2^2 \gamma_1^2 . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V; 55)}$$

Von den vier Wurzeln der Gleichung (V; 54) kommen nur die in Betracht, die reell, und deren Beträge kleiner als eins sind. Unter ihnen wird man in der Praxis diejenige, die den geographischen Bedingungen entspricht, immer ohne Schwierigkeit aussondern können. Ist $\sin \varphi$ gefunden, so ergibt sich aus (V; 53) die Uhrkorrektion

$$\operatorname{tg} \Delta u = \frac{C + D \sin \varphi}{A + B \sin \varphi} .$$

Damit wäre die Aufgabe im Prinzip gelöst, doch ist die Bestimmung von φ aus dem Sinus nur für kleine und mittlere Breiten sicher genug. Will man die Polhöhe aus einer Tangentenformel ableiten, so erreicht man dies auf zwei Wegen:

1. Man berechnet $t_i = \tau_i + \Delta u$ mit Hilfe des bereits bekanntgewordenen Uhrstandes. Dann ergeben die beiden Gleichungen (V; 52) $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ und damit

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma_1 \sin t_2 - \gamma_2 \sin t_1}{\beta_1 \cos t_1 \sin t_2 - \beta_2 \sin t_1 \cos t_2} .$$

2. Aus (V; 53) entnimmt man

$$\sin \varphi = \frac{C - A \operatorname{tg} \Delta u}{B \operatorname{tg} \Delta u - D} .$$

Dann ist

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}=\frac{(A+B)\operatorname{tg}\Delta u-(C+D)}{(B-A)\operatorname{tg}\Delta u+(C-D)}.$$

Bei nicht zu hoher Breite ist es, wie gesagt, nicht notwendig, auf diese Formeln zurückzugreifen, doch stellen sie wertvolle Kontrollen dar, auf die der Rechner nicht verzichten sollte. Man kann übrigens, wenn man will, die biquadratische Gleichung (V; 54) auch so umwandeln, daß sie für alle Breiten genaue φ liefert. Setzt man nämlich $\sin\varphi=\frac{2x}{1+x^2}$, so erhält man eine Gleichung 8. Grades in $x=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, deren Koeffizienten aber symmetrisch sind, so daß man sie in der aus der elementaren Algebra bekannten Weise auf eine Gleichung 4. Grades in $y=x+\frac{1}{x}$ zurückführen kann.

Die Auflösung der Gleichung (V; 54), $F(\varphi)=0$, gestaltet sich einfach, wenn man über einen guten Näherungswert für die geographische Breite verfügt, was in der Praxis immer der Fall ist. Das NEWTONsche Näherungsverfahren führt dann eindeutig auf die richtige Lösung. Ist $\sin\varphi=\sin\varphi_0+dy$ und $F(\varphi_0)=dF$, so gilt, falls man dy und dF als Differentiale ansehen darf, die Beziehung

$$dF+dy\,(b+2c\sin\varphi_0+3d\sin^2\varphi_0+4e\sin^3\varphi_0)=0,$$

aus der die Verbesserung dy der Näherungslösung $\sin\varphi_0$ zu entnehmen ist. Nötigenfalls, d. h. wenn der verbesserte Wert $\sin\varphi_1=\sin\varphi_0+dy$ die Bedingung $F(\varphi_1)=0$ noch nicht erfüllt, muß das Verfahren mit φ_1 als Ausgangswert wiederholt werden.

Zur Untersuchung der günstigsten Beobachtungsbedingungen differenzieren wir die zweite und dritte der Grundgleichungen (II; 23), indem wir links z und A, rechts φ und t als variabel ansehen:

$$\cos z\sin A\,dz+\sin z\cos A\,dA=\cos\delta\cos t\,dt,$$

$$\cos z\cos A\,dz-\sin z\sin A\,dA=-\cos\delta\sin\varphi\sin t\,dt+\cos z\,d\varphi.$$

Eliminieren wir dz aus diesen Gleichungen, so erhalten wir in

$$df=\sin z\,dA=\cos\delta\,(\cos t\cos A+\sin t\sin A\sin\varphi)\,dt-\cos z\sin A\,d\varphi$$

die gewünschte Beziehung zwischen dem Fehler des gemessenen Azimuts und den Fehlern der Ortszeit und der Polhöhe. Setzt man $dt=d\Delta u$, indem man einen etwaigen Fehler in der Ablesung der Uhrzeit u auf das Azimut wirft, und benutzt man die erste Gleichung (II; 27) und die zweite Gleichung (II; 29), so ergeben sich für die beiden Sterne ($i=1,2$) die Beziehungen

$$df_i=(\sin z_i\sin\varphi+\cos z_i\cos\varphi\cos A_i)\,d\Delta u-\cos z_i\sin A_i\,d\varphi\,,\qquad (\text{V}; 56)$$

in denen df_i die Einstellungsfehler der Sterne auf den Vertikalfaden des Instruments bedeuten, und aus denen man

$$N d\varphi = df_1 (\sin\varphi \sin z_2 + \cos\varphi \cos z_2 \cos A_2) - $$
$$- df_2 (\sin\varphi \sin z_1 + \cos\varphi \cos z_1 \cos A_1)\,,$$
$$N d\Delta u = df_1 \cos z_2 \sin A_2 - df_2 \cos z_1 \sin A_1\,,$$
$$N = \sin\varphi (\sin z_1 \cos z_2 \sin A_2 - \cos z_1 \sin z_2 \sin A_1) +$$
$$+ \cos\varphi \cos z_1 \cos z_2 \sin (A_2 - A_1)$$

ableitet. Berechnet man aus diesem ziemlich verwickelten Ausdruck nach Anhang D IV das mittlere Fehlerquadrat des Zenits, $\varepsilon_\sigma^2 = \varepsilon_\varphi^2 + \cos^2\varphi\, \varepsilon_{\Delta u}^2$, indem man, wie früher, den mittleren Einstellungsfehler mit ε bezeichnet, so ergibt sich

$$\varepsilon_\sigma^2 = \frac{\varepsilon^2}{N^2} [\sin^2\varphi (\sin^2 z_1 + \sin^2 z_2) + \cos^2\varphi (\cos^2 z_1 + \cos^2 z_2) +$$
$$+ 2 \sin\varphi \cos\varphi (\sin z_1 \cos z_1 \cos A_1 + \sin z_2 \cos z_2 \cos A_2)]\,.$$

Man erkennt sofort, daß dieser Ausdruck unverändert bleibt, wenn man z_1 mit z_2 und A_1 mit $-A_2$ vertauscht. Aus Symmetriegründen muß also das Minimum des Zenitfehlers für $z_1 = z_2 = z$ und $A_1 = -A_2 = A$ eintreten, was man natürlich auch streng beweisen kann. Die Sterne sollen also möglichst in gleicher Zenitdistanz und symmetrisch zum Meridian beobachtet werden.

Die Aufgabe, das günstigste Azimut und die günstigste Zenitdistanz als Funktionen von φ zu bestimmen, scheint bisher von den Theoretikern vernachlässigt worden sein. Es sei daher folgende bislang unveröffentlichte Lösung des Verfassers mitgeteilt: Unter den obigen Annahmen wird

$$\varepsilon_\sigma^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\sin^2\varphi \sin^2 z + 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin z \cos z \cos A + \cos^2\varphi \cos^2 z}{(\sin\varphi \sin z + \cos\varphi \cos z \cos A)^2 \cos^2 z \sin^2 A}\,. \qquad (V;57)$$

Setzt man hierin

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \cos z \cos A \cos\varphi\,, \\ \eta &= \cos z \sin A \cos\varphi\,, \\ \zeta &= \sin z \sin\varphi\,, \end{aligned}\right\} \qquad (V;58)$$

so erhält man kürzer

$$\varepsilon_\sigma^2 = \varepsilon^2 \frac{(\xi + \zeta)^2 + \eta^2}{2\eta^2 (\xi + \zeta)^2} \cos^2\varphi = f \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2\varphi\,.$$

Es ist also

$$f = \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{(\xi + \zeta)^2} \qquad (V;58a)$$

unter der Nebenbedingung

$$g = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \operatorname{ctg}^2\varphi - \cos^2\varphi = 0$$

zum Minimum zu machen. Nach bekannten Regeln sind also die Größen $\xi, \eta, \zeta, \lambda$ aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \zeta} = 0$$

$$g = 0$$

zu bestimmen. Die ersten drei dieser Gleichungen lauten explizit

$$\begin{aligned} \lambda \xi (\xi + \zeta)^3 &= 1, \\ \lambda \eta^4 &= 1, \\ \lambda \zeta (\xi + \zeta)^3 &= \operatorname{tg}^2 \varphi. \end{aligned}$$

Addiert bzw. dividiert man die erste und dritte, so erhält man

$$(\xi + \zeta)^4 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{\lambda} = \frac{\eta^4}{\cos^2 \varphi}, \quad \frac{\xi}{\zeta} = \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Man findet daher

$$\xi = \zeta \operatorname{ctg}^2 \varphi, \quad \eta = \zeta \sqrt{\cos \varphi}\,(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) = \zeta \frac{\sqrt{\cos \varphi}}{\sin^2 \varphi}$$

und wegen $g = 0$

$$\zeta^2 \left(\operatorname{ctg}^4 \varphi + \frac{\cos \varphi}{\sin^4 \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \varphi \right) = \zeta^2 \frac{\cos \varphi\,(1 + \cos \varphi)}{\sin^4 \varphi} = \cos^2 \varphi,$$

also schließlich

$$\xi = \cos^2 \varphi \sqrt{\frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}, \quad \eta = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi}}, \quad \zeta = \sin^2 \varphi \sqrt{\frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}} \qquad \text{(V; 59)}$$

und

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\xi}{\eta} = \sqrt{\cos^3 \varphi}, \quad \sin z = \frac{\zeta}{\sin \varphi} = |\sin \varphi| \sqrt{\frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}.$$

In Abb. 43 findet man A und z als Funktionen von φ dargestellt. Am Äquator wird man die Sterne möglichst unter den Azimuten $\pm 45°$ (oder 135°) beobachten, in der Nähe der Pole dagegen im Ersten Vertikal. In kleinen und sehr hohen Breiten sind kleine Zenitdistanzen zu bevorzugen, in mittleren Breiten steigen die günstigsten z-Werte bis 30° (für $|\varphi| = 60°$) an. Allgemein ist

$$\varepsilon_\sigma \geqq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(1 + \cos \varphi), \qquad \text{(V; 60)}$$

wie man durch Einsetzen von (V; 59) in (V; 58a) leicht beweist.

Was die Vorzeichen der Quadratwurzeln anbelangt, so zeigt (V; 58), daß ζ, und daher wegen $\xi = \zeta \operatorname{ctg}^2 z$ auch ξ, stets das Vorzeichen von $\sin\varphi$ haben, d. h. sie sind positiv auf der nördlichen, negativ auf der südlichen Halbkugel der Erde. Dagegen ist η stets positiv, wenn wir unter A das günstigste Azimut des Weststernes verstehen. ξ und daher auch $\operatorname{ctg} A$ erleiden also beim Übergang über den Äquator einen Vorzeichensprung: A geht von 45° auf 135° über. Das ist aber keine echte Unstetigkeit, da ja gleichzeitig z durch null geht. Wichtig ist, daß die beiden Sterne stets auf derjenigen Hälfte der sichtbaren Sphäre liegen sollen, auf der sich der sichtbare Himmelspol nicht befindet, also unter nördlichen Breiten südlich, unter südlichen Breiten nördlich des Ersten Vertikals. Das läßt sich auch unmittelbar verständlich machen, wenn man in (V; 57)

$$\sin\varphi \sin z + \cos\varphi \cos z \cos A = \\ = \cos\delta \cos p$$

setzt. Dann wird nämlich

$$\varepsilon_\sigma^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 z \sin^2 A} + \right. \\ \left. + \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\delta \cos^2 p}\right),$$

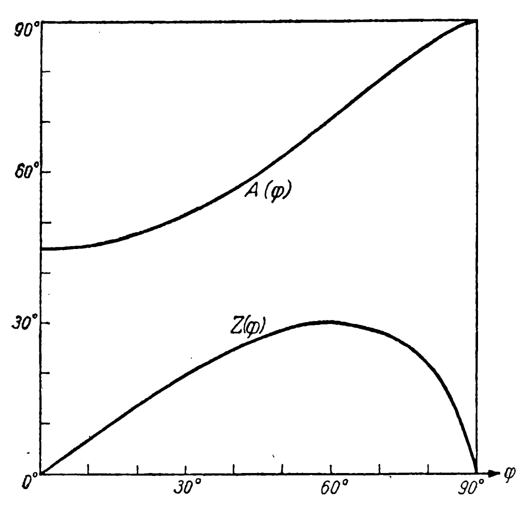


Abb. 43: Zweiazimutproblem; günstigste Azimute und Zenitdistanzen

und man erkennt auf den ersten Blick, daß Sterne in der Nähe des Meridians ($\sin A = 0$) und in der Nähe ihrer größten Digression ($\cos p = 0$) ungeeignet sind. Die größten Digressionen finden aber stets auf derjenigen Seite vom Ersten Vertikal statt, die den sichtbaren Himmelspol enthält.

Die Formeln (V; 55) zeigen, daß die Gleichung vierten Grades für $\sin\varphi$ in eine quadratische übergeht, wenn $\varepsilon = 0$, also $\operatorname{tg} A_1 = \operatorname{tg} A_2$ ist, d. h. wenn man die beiden Sterne im gleichen Vertikal, aber natürlich auf verschiedenen Seiten des Zenits beobachtet. In diesem Falle ist nur *eine* absolute Ablesung des Azimutkreises erforderlich. Um auch hier die Symmetrie der Sterne in bezug auf den Meridian zu beachten, wird man diese Beobachtungen möglichst im Ersten Vertikal anstellen. Man verzichtet dann zugunsten einer sehr vereinfachten Reduktion auf den Vorteil des geringsten Fehlereinflusses.

Setzt man in (V; 58) $A = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\xi = 0, \quad \eta = \cos z \cos\varphi, \quad \zeta = \sin z \sin\varphi,$$

also
$$f = \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\zeta^2} = \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 z \operatorname{ctg}^2 \varphi)}{\cos^2 z \cos^2 \varphi}.$$

Das Minimum dieser Funktion von z tritt ein für $\operatorname{ctg} z = \sqrt{\operatorname{tg} \varphi}$, und es ist dann
$$\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} (1 + |\operatorname{ctg} \varphi|).$$

Der kleinste mittlere Zenitfehler ist also, wie ein Vergleich mit (V; 60) lehrt, stets größer als derjenige, den wir für die günstigsten Azimute gefunden hatten. Für $\varphi = 0$ wächst er sogar über alle Grenzen — diese Methode ist also unter kleinen Breiten nicht anwendbar. Für mittlere und hohe Breiten ergeben sich dagegen Fehlereinflüsse, die in mäßigen Grenzen bleiben. Für $\varphi = 45°$ erhält man z. B. $\varepsilon_\sigma = \varepsilon\sqrt{2}$ bei $z = 45°$. Für $\varphi = 90°$ strebt ε_σ gegen $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ und z gegen null.

50. Bestimmung von Ortszeit und Polhöhe aus den Durchgängen zweier Sternpaare durch zwei Vertikale

Wiederholt man die am Schluß des vorigen Abschnitts beschriebene Beobachtung der Durchgänge zweier Sterne S_1, S_2 durch den gleichen Vertikal V an einem anderen Sternpaar S_3, S_4 und einem anderen Vertikal W, so kann man Zeit und Polhöhe allein aus den Differenzen der Durchgangszeiten bestimmen, ohne das Azimut der beiden Vertikale zu kennen. Diese Methode ist ein Analogon zu der in Abschnitt 42 beschriebenen.

Für die beiden Sternpaare ist wegen (IV; 25)
$$\operatorname{tg} \varphi \sin (t_2 - t_1) = \operatorname{tg} \delta_1 \sin t_2 - \operatorname{tg} \delta_2 \sin t_1,$$
$$\operatorname{tg} \varphi \sin (t_4 - t_3) = \operatorname{tg} \delta_3 \sin t_4 - \operatorname{tg} \delta_4 \sin t_3.$$

Setzt man wie in Abschnitt 42
$$t_i = \tau_i + \Delta u; \quad \xi = \operatorname{ctg} \varphi \cos \Delta u, \quad \eta = \operatorname{ctg} \varphi \sin \Delta u,$$

so ergeben sich daraus nach einfacher Rechnung die beiden linearen Gleichungen
$$\sin (\tau_2 - \tau_1) = \xi (\operatorname{tg} \delta_1 \sin \tau_2 - \operatorname{tg} \delta_2 \sin \tau_1) + \eta (\operatorname{tg} \delta_1 \cos \tau_2 - \operatorname{tg} \delta_2 \cos \tau_1),$$
$$\sin (\tau_4 - \tau_3) = \xi (\operatorname{tg} \delta_3 \sin \tau_4 - \operatorname{tg} \delta_4 \sin \tau_3) + \eta (\operatorname{tg} \delta_3 \cos \tau_4 - \operatorname{tg} \delta_4 \cos \tau_3),$$
aus denen man ξ, η und somit φ, Δu bestimmt.

Zur Ermittlung der Fehlereinflüsse benutzen wir die Gleichungen (V; 56), in denen wir wie in (IV; 26)
$$dA_1 = dV + \frac{df_1}{\sin z_1}, \qquad dA_3 = dW + \frac{df_3}{\sin z_3},$$
$$dA_2 = dV + \frac{df_2}{\sin z_2}, \qquad dA_4 = dW + \frac{df_4}{\sin z_4}$$

setzen. Dabei bedeuten dV und dW die zu eliminierenden Variationen der Azimute der beiden Vertikale. Für das erste Sternpaar gilt dann

$$\left.\begin{aligned}\sin z_1\, dV + df_1 &= (\sin z_1 \sin\varphi + \cos z_1 \cos\varphi \cos A_1)\, d\Delta u - \\ &\quad - \cos z_1 \sin A_1 d\varphi, \\ \sin z_2\, dV + df_2 &= (\sin z_2 \sin\varphi + \cos z_2 \cos\varphi \cos A_2)\, d\Delta u - \\ &\quad - \cos z_2 \sin A_2\, d\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad (V;61)$$

Eliminiert man dV und bedenkt, daß $\cos A_2 = \pm \cos A_1$, $\sin A_2 = \pm \sin A_1$, je nachdem die beiden Sterne auf der gleichen oder der entgegengesetzten Seite vom Zenit beobachtet werden, und wiederholt man dasselbe für das zweite Sternpaar, so ergeben sich die Gleichungen

$$df_1 \sin z_2 - df_2 \sin z_1 = \sin\mu_1 (\cos A_1 \cos\varphi\, d\Delta u - \sin A_1\, d\varphi),$$
$$df_3 \sin z_4 - df_4 \sin z_3 = \sin\mu_3 (\cos A_3 \cos\varphi\, d\Delta u - \sin A_3 d\varphi).$$
$$(\mu_1 = z_2 \mp z_1, \quad \mu_3 = z_4 \mp z_3).$$

Hieraus berechnet man

$$\cos\varphi\, d\Delta u = \\ = \frac{(df_1 \sin z_2 - df_2 \sin z_1) \sin A_3 \sin\mu_3 - (df_3 \sin z_4 - df_4 \sin z_3) \sin A_1 \sin\mu_1}{\sin\mu_1 \sin\mu_3 \sin(A_3 - A_1)},$$

$$d\varphi = \frac{(df_1 \sin z_2 - df_2 \sin z_1) \cos A_3 \sin\mu_3 - (df_3 \sin z_4 - df_4 \sin z_3) \cos A_1 \sin\mu_1}{\sin\mu_1 \sin\mu_3 \sin(A_3 - A_1)}$$

und in üblicher Weise

$$\varepsilon_\sigma^2 = \varepsilon_\varphi^2 + \cos^2\varphi\, \varepsilon_{\Delta u}^2 = \frac{\varepsilon^2}{\sin^2(A_3 - A_1)} \left[\frac{\sin^2 z_1 + \sin^2 z_2}{\sin^2(z_2 \mp z_1)} + \frac{\sin^2 z_3 + \sin^2 z_4}{\sin^2(z_4 \mp z_3)}\right].$$

Damit dieser Ausdruck möglichst klein werde, ist es zunächst notwendig, $A_3 - A_1 = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, d. h. die Vertikale V und W sollen sich rechtwinklig schneiden, während im übrigen ihre Lage beliebig ist. Werden die Sterne jedes Paares auf verschiedenen Seiten vom Zenit beobachtet, so sind, wie in den ähnlichen Formeln (III; 32) und (IV; 27), die Zenitdistanzen gleich zu wählen, und es gilt im Nenner das positive Zeichen. Setzt man alle Zenitdistanzen gleich z, so erhält man dann

$$\varepsilon_\sigma \geqq \frac{\varepsilon}{\cos z} \to \varepsilon \quad \text{für} \quad z \to 0.$$

Beobachtet man die Sterne auf der gleichen Seite vom Zenit, so gilt das negative Zeichen, und man hat möglichst verschiedene Zenitdistanzen zu wählen. Das Optimum für ε_σ ist dann $\varepsilon\sqrt{2}$.

Die Durchgangszeiten der vier Sterne durch zwei Vertikalebenen, deren Azimute nicht bekannt zu sein brauchen, lassen sich ohne optische Hilfsmittel an dem in Abschnitt 26 beschriebenen Harzerschen Fadengestell

beobachten. Es ist dann erforderlich, an den beiden freien Querstangen ein zweites Fadendreieck anzubringen, dessen Ebene auf der des ersten möglichst senkrecht steht. Es muß natürlich dafür gesorgt werden, daß die beiden Fadenzüge und die angehängten Gewichte sich nirgends berühren. Eine Orientierung des Gerüsts nach den Himmelsrichtungen ist bei Anwendung dieser Methode nicht notwendig.

Eine Variante dieses Verfahrens besteht darin, daß man den gleichzeitigen Durchgang eines Sternpaares durch den Vertikal V und den gleichzeitigen Durchgang des anderen Sternenpaares durch den zu V möglichst senkrechten Vertikal W beobachtet. Sind die Koordinaten α_i, δ_i der vier Sterne gegeben, so findet man nach (III; 34) die Lagekoordinaten i_v, Ω_v von V aus dem ersten, die Lagekoordinaten i_w, Ω_w von W aus dem zweiten Sternpaar. Seien Θ_v und Θ_w die beiden Durchgangszeiten, so ist nach (III;33)

$$\sin\,(\Theta_v-\Omega_v) = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg} i_v = \sin\,(u_v-\Omega_v)\cos\Delta u + \cos\,(u_v-\Omega_v)\sin\Delta u\,,$$
$$\sin\,(\Theta_w-\Omega_w) = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg} i_w = \sin\,(u_w-\Omega_w)\cos\Delta u + \cos\,(u_w-\Omega_w)\sin\Delta u$$

oder, mit

$$\xi = \operatorname{ctg}\varphi\cos\Delta u\,,\quad \eta = \operatorname{ctg}\varphi\sin\Delta u\,,$$
$$\operatorname{ctg} i_v = \xi\sin\,(u_v-\Omega_v) + \eta\cos\,(u_v-\Omega_v)\,,$$
$$\operatorname{ctg} i_w = \xi\sin\,(u_w-\Omega_w) + \eta\cos\,(u_w-\Omega_w)\,.$$

Diese linearen Gleichungen ergeben ξ, η und damit $\varphi, \Delta u$.

In der Praxis wird man für V den Vertikal des Polarsterns, W den eines zenitnahen Sternes in der größten Digression wählen, damit der eine Stern jedes Paares sein Azimut möglichst langsam ändert. Bei Beobachtungen mit bloßem Auge kann man wie bei den in Abschnitt 27 und 36 beschriebenen Verfahren das HARZERsche Fadenlot verwenden. Es müssen dann bei beiden Beobachtungen die Sternpaare auf der gleichen Seite vom Zenit gewählt und die für diesen Fall ungünstigeren Fehlereinflüsse in Kauf genommen werden.

51. Das Dreiazimutproblem. Lösung von WILKENS

Ein Gegenstück zu dem in den Abschnitten 46—48 beschriebenen allgemeinen Dreihöhenproblem bildet die Aufgabe, Zeit und Polhöhe aus *drei Azimuten* zu bestimmen. Für die Reduktion der Beobachtungen werden, außer den Uhrzeiten der Fadendurchgänge, nur die *Differenzen* der drei Azimute benötigt. Der Nullpunktsfehler des Azimutkreises und damit die Kenntnis der Nordsüdrichtung ergibt sich aus der Rechnung als Nebenprodukt.

Eine ältere Lösung dieser Aufgabe stammt von Th. CLAUSEN[1]; in neuerer Zeit ist sie von WILKENS[2], HARZER[3] und dem Verfasser[4]) behandelt worden.

[1]) Th. CLAUSEN: Eine neue Art, die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen. Journ. f. d. reine und angew. Math. 7, 105, Berlin 1831.

[2]) A. WILKENS: Über die Verallgemeinerungen des GAUSSschen Dreihöhenproblems. Astron. Nachr. 191, 361.

[3]) P. HARZER: Über das Problem der drei Azimute. Astron. Nachr. 193, 145.

[4]) K. STUMPFF: Über das Problem der Ortsbestimmung aus drei relativen Zenitdistanzen oder Azimuten. Astron. Nachr. 277.

WILKENS greift das Problem der drei Azimute, ebenso wie das der drei Höhen, auf geometrischem Wege an. Seine Lösung ist unsymmetrisch, da sie einem der drei Sterne (S_2) eine bevorzugte Stellung einräumt. Seien S_1, S_2, S_3 die drei Sternörter, A_1', A_2', A_3' die zugehörigen unkorrigierten Ablesungen des Azimutkreises und

$$\Delta_1 = A_2' - A_1', \quad \Delta_3 = A_3' - A_2', \quad \lambda_1 = \tau_2 - \tau_1, \quad \lambda_3 = \tau_3 - \tau_2,$$

so ist (Abb. 44) in den Dreiecken ZS_1S_2 und ZS_2S_3 nach dem Cotangentensatz [Anhang A I (3)]

$$\left.\begin{aligned} \cos x \cos z_2 &= \sin z_2 \operatorname{ctg} D_1 - \sin x \operatorname{ctg} \Delta_1, \\ \cos(\sigma - x) \cos z_2 &= \sin z_2 \operatorname{ctg} D_3 - \sin(\sigma - x) \operatorname{ctg} \Delta_3. \end{aligned}\right\} \quad \text{(V; 62)}$$

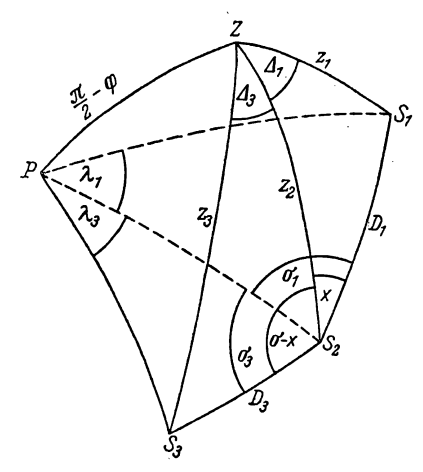


Abb. 44: Dreiazimutproblem nach WILKENS

Ferner gelten in den Dreiecken PS_iS_2 ($i = 1{,}3$) die Grundformeln

$$\cos D_i = \sin\delta_i \sin\delta_2 + \\ + \cos\delta_i \cos\delta_2 \cos\lambda_i,$$

$$\sin D_i \cos\sigma_i = \sin\delta_i \cos\delta_2 - \\ - \cos\delta_i \sin\delta_2 \cos\lambda_i,$$

$$\sin D_i \sin\sigma_i = \cos\delta_i \sin\lambda_i,$$

aus denen man die Stücke D_1, D_3, σ_1, σ_3 und damit auch $\sigma = \sigma_1 + \sigma_3$ berechnet. Die Gleichungen (V; 62) enthalten und bestimmen dann x und z_2 als Unbekannte, und die weitere Aufgabe besteht darin, diese Größen zu trennen.

Setzt man zur Abkürzung

$$\operatorname{ctg}\Delta_1 = \alpha, \quad \operatorname{ctg} D_1 = \beta, \quad \cos\sigma = \gamma, \quad \sin\sigma \operatorname{ctg}\Delta_3 = \delta,$$
$$\sin\sigma = \varepsilon, \quad -\cos\sigma \operatorname{ctg}\Delta_3 = \zeta, \quad \operatorname{ctg} D_3 = \eta,$$

so erhalten die Gleichungen (V; 62) die Form

$$\left.\begin{aligned} \cos x \cos z_2 + \alpha \sin x &= \beta \sin z_2, \\ \cos x (\gamma \cos z_2 + \delta) + \sin x (\varepsilon \cos z_2 + \zeta) &= \eta \sin z_2. \end{aligned}\right\} \quad \text{(V; 63)}$$

Hieraus berechnet man

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \sin z_2 \frac{\eta \cos z_2 - \beta(\gamma \cos z_2 + \delta)}{\cos z_2 (\varepsilon \cos z_2 + \zeta) - \alpha(\gamma \cos z_2 + \delta)}, \\ \cos x &= \sin z_2 \frac{\beta(\varepsilon \cos z_2 + \zeta) - \eta\alpha}{\cos z_2 (\varepsilon \cos z_2 + \zeta) - \alpha(\gamma \cos z_2 + \delta)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(V; 64)}$$

und damit

$$\operatorname{tg} x = \frac{\eta \cos z_2 - \beta (\gamma \cos z_2 + \delta)}{\beta (\varepsilon \cos z_2 + \zeta) - \eta \alpha}. \qquad \text{(V; 65)}$$

Setzt man (V; 64) in die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ein und drückt $\sin^2 z_2$ durch $1 - \cos^2 z_2$ aus, so erhält man für $\cos z_2$ eine Gleichung vierten Grades

$$\cos^4 z_2 + a \cos^3 z_2 + b \cos^2 z_2 + c \cos z_2 + d = 0 \qquad \text{(V; 66)}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Delta a &= 2 [\varepsilon (\zeta - \alpha\gamma) + \beta \varepsilon (\beta \zeta - \eta \alpha) - \beta \delta (\eta - \beta \gamma)],\\
\Delta b &= (\zeta - \alpha\gamma)^2 + (\beta\zeta - \eta\alpha)^2 + \beta^2 \delta^2 - 2\alpha\delta\varepsilon - \beta^2 \varepsilon^2 - (\eta - \beta\gamma)^2,\\
\Delta c &= 2 [\beta\delta (\eta - \beta\gamma) - \alpha\delta (\zeta - \alpha\gamma) - \beta \varepsilon (\beta\zeta - \eta\alpha)],\\
\Delta d &= \alpha^2 \delta^2 - (\beta\zeta - \eta\alpha)^2 - \beta^2 \delta^2,\\
\Delta &= \varepsilon^2 (1 + \beta^2) + (\eta - \beta\gamma)^2.
\end{aligned}$$

Nach Lösung von (V; 66) ergibt sich x nach (V; 65) und sodann ein genauerer Wert z_2 aus der Tangentenformel

$$\operatorname{tg} z_2 = \cos x \frac{\alpha \varepsilon \operatorname{tg}^2 x - (\zeta - \alpha\gamma) \operatorname{tg} x - \delta}{(\alpha\eta - \beta\zeta) \operatorname{tg} x - \beta\delta},$$

die man leicht erhält, wenn man aus (V; 63) $\sin z_2$ und $\cos z_2$ berechnet.

Außer x und z_2 ist nun auch der parallaktische Winkel im Nautischen Dreieck PZS_2, $p_2 = \sigma_1 - x$ bekannt, und man findet dann φ, t_2 (und damit auch $\Delta u = t_2 - \tau_2$) aus den in diesem Dreieck gültigen Formeln

$$\begin{aligned}
\sin \varphi &= \sin \delta_2 \cos z_2 + \cos \delta_2 \sin z_2 \cos p_2,\\
\cos \varphi \cos t_2 &= \cos \delta_2 \cos z_2 - \sin \delta_2 \sin z_2 \cos p_2,\\
\cos \varphi \sin t_2 &= \sin z_2 \sin p_2,
\end{aligned}$$

und schließlich, wenn man auch die Nullpunktskorrektion $\Delta A = A_2' - A_2$ des Kreises bestimmen will, A_2 aus (III; 17):

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{\sin t_2}{\cos t_2 \sin \varphi - \operatorname{tg} \delta_2 \cos \varphi}.$$

Zur Untersuchung der Fehlereinflüsse benutzen wir wieder Gleichungen von der Form (V; 61). Wir haben hier das System

$$df_i = (\sin z_i \operatorname{tg} \varphi + \cos z_i \cos A_i) \cos \varphi d\Delta u - \cos z_i \sin A_i d\varphi - \sin z_i dA \qquad \text{(V; 67)}$$

nach $\cos \varphi d\Delta u$, $d\varphi$ und $dA = d\Delta A$ aufzulösen. Wir wollen uns die sehr komplizierte Aufgabe, die Bedingungen für die kleinste Fehlereinwirkung aufzusuchen, dadurch erleichtern, daß wir die drei Zenitdistanzen z_i einander

gleich setzen. (Daß das absolute Fehlerminimum diese Bedingung erfordert, ist aus Symmetriegründen einleuchtend, müßte aber streng genommen noch bewiesen werden.)

Mit $z_i = z$ erhalten wir für die Hauptdeterminante des Systems (V; 67)

$$\begin{aligned}\varDelta &= |\sin z \operatorname{tg}\varphi + \cos z \cos A_i, \quad \cos z \sin A_i, \quad \sin z| \\ &= \sin z \cos^2 z \sum \sin(A_k - A_j) \\ &= -4 \sin z \cos^2 z \sin\frac{A_k - A_j}{2} \sin\frac{A_i - A_k}{2} \sin\frac{A_j - A_i}{2},\end{aligned}$$

indem wir den in Anhang B IV bewiesenen Satz benutzen, und es ist

$$\begin{aligned}\varDelta \cdot \cos\varphi\, d\varDelta u &= \sin z \cos z \sum df_i (\sin A_j - \sin A_k) = \\ &= -2 \sin z \cos z \sum df_i \sin\frac{A_k - A_j}{2} \cos\frac{A_k + A_j}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varDelta \cdot d\varphi &= \sin z \cos z \sum df_i (\cos A_j - \cos A_k) = \\ &= 2 \sin z \cos z \sum df_i \sin\frac{A_k - A_j}{2} \sin\frac{A_k + A_j}{2},\end{aligned}$$

$$\varDelta \cdot d\varDelta A = \sin z \cos z \sum df_i [\operatorname{tg}\varphi (\sin A_j - \sin A_k) + \operatorname{ctg} z \sin(A_j - A_k)] =$$

$$= -2 \sin z \cos z \sum df_i \sin\frac{A_k - A_j}{2} \left[\operatorname{tg}\varphi \cos\frac{A_k + A_j}{2} + \operatorname{ctg} z \cos\frac{A_k - A_j}{2}\right],$$

wobei die Summen stets über die drei zyklischen Permutationen der Indizes i, j, k zu erstrecken sind. Es folgt schließlich

$$\cos\varphi\, d\varDelta u = \frac{1}{2\cos z} \sum \frac{df_i \cos\frac{A_k + A_j}{2}}{\sin\frac{A_i - A_k}{2} \sin\frac{A_j - A_i}{2}},$$

$$d\varphi = -\frac{1}{2\cos z} \sum \frac{df_i \sin\frac{A_k + A_j}{2}}{\sin\frac{A_i - A_k}{2} \sin\frac{A_j - A_i}{2}},$$

$$d\varDelta A = \frac{1}{2\cos z} \sum \frac{df_i \left[\operatorname{tg}\varphi \cos\frac{A_k + A_j}{2} + \operatorname{ctg} z \cos\frac{A_k - A_j}{2}\right]}{\sin\frac{A_i - A_k}{2} \sin\frac{A_j - A_i}{2}}.$$

Nach Anhang D IV ist dann das Quadrat des mittleren Fehlers des Zenitpunkts, wenn wir mit ε den mittleren Einstellungsfehler bezeichnen,

$$\varepsilon_\sigma^2 = \varepsilon_\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\varepsilon_{\Delta u}^2 = \frac{\varepsilon^2}{4\cos^2 z}\sum \frac{1}{\sin^2\frac{A_i - A_k}{2}\sin^2\frac{A_j - A_i}{2}}.$$

Damit dieser Ausdruck möglichst klein werde, muß z möglichst klein und müssen, wie unschwer einzusehen ist, die Azimutdifferenzen einander gleich, also jeweils 120° sein. Setzt man also $\cos z = 1$ und $\sin^2\frac{A_k - A_j}{2} = \frac{3}{4}$, so findet man für diesen günstigen Fall

$$\varepsilon_\sigma = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

Für das Quadrat des mittleren Fehlers der Bestimmung der Azimutkreiskorrektion ergibt sich entsprechend, da $\cos A_j + \cos A_k = -\cos A_i$,

$$\varepsilon_{\Delta A}^2 = \frac{\varepsilon^2}{4\cos^2 z}\sum \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\cos^2\frac{A_k + A_j}{2} - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg} z\cos A_i + \operatorname{ctg}^2 z\cos^2\frac{A_k - A_j}{2}}{\sin^2\frac{A_i - A_k}{2}\sin^2\frac{A_j - A_i}{2}}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Azimute gleichmäßig verteilt sind, ist

$$\sin^2\frac{A_k - A_j}{2} = \frac{3}{4}, \qquad \sum\cos^2\frac{A_k - A_j}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\sum\cos A_i = 0, \qquad \sum\cos^2\frac{A_k + A_j}{2} = \frac{3}{2},$$

also

$$\varepsilon_{\Delta A}^2 = \frac{\varepsilon^2}{3\cos^2 z}[2\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{ctg}^2 z].$$

In bezug auf die möglichst sichere Bestimmung des Kreisfehlers gelten also andere Bedingungen als für die Ortsbestimmung selbst, und man sieht sofort, daß — wenigstens für mittlere Breiten — weder sehr kleine noch sehr große Zenitdistanzen gewählt werden dürfen. Das Fehlerminimum tritt ein, wie eine einfache Untersuchung ergibt, wenn

$$\operatorname{ctg}^2 z = \sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Unter dieser Bedingung erhält man nach leichter Rechnung

$$\varepsilon_{\Delta A} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}(1 + \sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi). \qquad (V;\ 68)$$

Für kleine Breiten ist demnach die Bestimmung des Südpunktes am genauesten, und man hat dann Sterne in großen Zenitdistanzen zu wählen. In hohen Breiten wird sie ungenau, und man nimmt zenitnahe Sterne. Am Pol selbst ist natürlich die Eichung des Azimutkreises unmöglich, da ja dort die Begriffe der Himmelsrichtungen ihren Sinn verlieren. In Formel (V; 68) findet diese Erscheinung ihren klaren mathematischen Ausdruck.

52. Das Dreiazimutproblem. Lösung von STUMPFF

Harzer hat versucht, die Unsymmetrien der Wilkensschen Lösung zu beseitigen, indem er Wege beschritt, die ihn bei der Lösung der einfacheren Dreihöhenaufgabe zum Erfolg führten. Er gelangte wie Wilkens zu einer Gleichung vierten Grades für den Cosinus einer der drei Zenitdistanzen, aber es ist ihm nicht geglückt, die Durchsichtigkeit der mathematischen Schlußfolgerungen und die Einfachheit des Algorithmus zu verbessern. Wir können daher diese interessante, aber für die praktische Rechnung ungeeignete Methode mit dem Hinweis auf die Originalarbeit (Fußnote S. 147) übergehen.

Im folgenden sei der Lösungsversuch des Verfassers beschrieben, der ebenfalls die Erfahrungen am Dreihöhenproblem (Abschnitt 48) weitgehend benutzt und die tiefe innere Verwandtschaft beider Aufgaben deutlich hervortreten läßt. Man wende die Grundgleichung (III; 17) auf drei Sterne ($i = 1, 2, 3$) an und schreibe sie in der Form

$$\sin A_i (\cos\varphi \sin\delta_i - \sin\varphi \cos\delta_i \cos t_i) + \cos A_i \cos\delta_i \sin t_i = 0.$$

Setzt man nun

$$t_i = \tau_i + \Delta u, \quad A_i = A_i' + \Delta A,$$

wobei die A_i' wie im vorigen Abschnitt die Kreisablesungen bedeuten und ΔA die unbekannte Nullpunktskorrektion des Kreises ist, so ergeben sich nach elementarer Rechnung die Gleichungen

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta = u_i x + v_i y + w_i z, \tag{V; 69}$$

mit den Unbekannten

$$\left.\begin{aligned} x &= -\cos\Delta A \sin\Delta u + \sin\Delta A \cos\Delta u \sin\varphi, \\ y &= \cos\Delta A \cos\Delta u + \sin\Delta A \sin\Delta u \sin\varphi, \\ z &= \sin\Delta A \cos\varphi, \\ \xi &= \sin\Delta A \sin\Delta u + \cos\Delta A \cos\Delta u \sin\varphi, \\ \eta &= -\sin\Delta A \cos\Delta u + \cos\Delta A \sin\Delta u \sin\varphi, \\ \zeta &= \cos\Delta A \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{V; 70}$$

und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_i &= -\sin A_i' \cos\delta_i \cos\tau_i, & u_i &= \cos A_i' \cos\delta_i \cos\tau_i, \\ b_i &= \sin A_i' \cos\delta_i \sin\tau_i, & v_i &= -\cos A_i' \cos\delta_i \sin\tau_i, \\ c_i &= \sin A_i' \sin\delta_i, & w_i &= -\cos A_i' \sin\delta_i. \end{aligned}$$

Zwischen den sechs Größen (V; 70) bestehen außer den drei homogenen linearen Gleichungen (V; 69) die Beziehungen zweiten Grades

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (V; 71)$$

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0. \qquad (V; 72)$$

Man bestimme nun die neun Hilfsgrößen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2;\ \xi_3, \eta_3, \zeta_3$ aus folgenden drei Systemen von je drei linearen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_i\xi_1 + b_i\eta_1 + c_i\zeta_1 &= u_i, \\ a_i\xi_2 + b_i\eta_2 + c_i\zeta_2 &= v_i, \\ a_i\xi_3 + b_i\eta_3 + c_i\zeta_3 &= w_i, \end{aligned}\quad (i = 1, 2, 3)\right\} \qquad (V; 73)$$

eine Operation, die rechnerisch (besonders mit Hilfe der Rechenmaschine) bequem ausführbar ist, da die drei Systeme dieselbe Hauptdeterminante besitzen. Zwischen den neun Hilfsgrößen und den sechs Unbekannten bestehen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z, \\ \eta &= \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z, \\ \zeta &= \zeta_1 x + \zeta_2 y + \zeta_3 z, \end{aligned}\right\} \qquad (V; 74)$$

wie man leicht beweist, indem man die Gleichungen (V; 73) mit x, y, z multipliziert und addiert. Das Ergebnis ist identisch mit (V; 69), woraus die Behauptung folgt.

Setzt man nun in die Differenz der Gleichungen (V; 71) und in (V; 72) die Ausdrücke (V; 74) ein, so erhält man zwei homogene quadratische Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 + D_1yz + E_1zx + F_1xy &= 0, \\ A_2x^2 + B_2y^2 + C_2z^2 + D_2yz + E_2zx + F_2xy &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (V; 75)$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - 1, & A_2 &= \xi_1, \\ B_1 &= \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - 1, & B_2 &= \eta_2, \\ C_1 &= \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 - 1, & C_2 &= \zeta_3, \\ D_1 &= \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3, & D_2 &= \zeta_2 + \eta_3, \\ E_1 &= \xi_3\xi_1 + \eta_3\eta_1 + \zeta_3\zeta_1, & E_2 &= \xi_3 + \zeta_1, \\ F_1 &= \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2, & F_2 &= \eta_1 + \xi_2, \end{aligned}\right\} \qquad (V; 76)$$

aus denen man $u = \frac{x}{y}$ und $v = \frac{z}{y}$ bestimmen kann, worauf man wegen (V; 71) y aus

$$y^2(u^2 + v^2 + 1) = 1, \text{ sodann } x = yu, \quad z = yv$$

erhält. Sofern Δu und ΔA einigermaßen klein sind, ist y, wie aus der Definition folgt, immer positiv und nahezu gleich eins.

Wenn man aus den beiden Gleichungen (V; 75) eine der Unbekannten u, v eliminiert, ergibt sich für die andere eine Gleichung vierten Grades. Es ist aber nicht zweckmäßig, diese Substitution explizit vorzunehmen, da die Symmetrie der Formeln, die in den Ausdrücken (V; 76) noch klar hervortritt, durch die Bevorzugung einer der Unbekannten verloren ginge. Es ist daher zweckmäßig, (V; 75) als die Schlüsselgleichungen des Problems anzusehen und die Umwandlung in eine biquadratische Gleichung erst vorzunehmen, nachdem man die numerischen Werte der Koeffizienten eingesetzt hat.

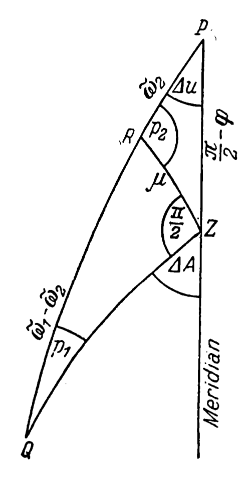


Abb. 45: Dreiazimutproblem nach STUMPFF

Mit x, y, z sind auch ξ, η, ζ durch (V; 74) bekannt. Um aus diesen Größen die eigentlichen Unbekannten φ, Δu, ΔA abzuleiten, nehmen wir eine geometrische Überlegung zu Hilfe. In Abb. 45 sei PZ der Meridian, PQ der Stundenkreis mit dem Stundenwinkel Δu, ZQ der Vertikal mit dem Azimut ΔA. Der Schnittpunkt Q dieser beiden Kreise habe die Poldistanz $\tilde{\omega}_1$; der zu ZQ rechtwinklige Vertikal treffe PQ im Punkte R mit der Poldistanz $\tilde{\omega}_2$ und der Zenitdistanz μ. Die parallaktischen Winkel in den Dreiecken PZQ und PZR seien p_1 und p_2. Dann findet man aus (V; 70), indem man die Grundformeln Anhang A I (2) auf diese Dreiecke anwendet, die Beziehungen

$$x = \sin p_1 \cos \tilde{\omega}_1, \qquad \xi = \sin p_2 \cos \tilde{\omega}_2,$$
$$y = \cos p_1, \qquad \eta = \cos p_2,$$
$$z = \sin p_1 \sin \tilde{\omega}_1, \qquad \zeta = \sin p_2 \sin \tilde{\omega}_2,$$

aus denen man p_1, p_2; $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ ableiten kann. Im rechtwinkligen Dreieck ZRQ ist ferner nach der zweiten Formel Anhang A I (6)

$$\operatorname{tg} \mu = -\cos p_2 \operatorname{tg} (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2),$$

und es folgen sodann aus Dreieck PZQ die Gleichungen

$$\sin \varphi = \cos \tilde{\omega}_2 \cos \mu + \sin \tilde{\omega}_2 \sin \mu \cos p_2,$$
$$\cos \varphi \cos \Delta u = \sin \tilde{\omega}_2 \cos \mu - \cos \tilde{\omega}_2 \sin \mu \cos p_2,$$
$$\cos \varphi \sin \Delta u = \sin \mu \sin p_2,$$
$$\cos \varphi \cos \Delta A = \sin \tilde{\omega}_2 \sin p_2,$$
$$\cos \varphi \sin \Delta A = \cos \tilde{\omega}_2 \sin \mu - \sin \tilde{\omega}_2 \cos \mu \cos p_2$$

zur Bestimmung der gesuchten Größen.

Sind Δu und ΔA hinreichend klein, was in der Praxis immer erreichbar ist, so läßt sich die umständliche Aufstellung und Lösung der biquadratischen Gleichung umgehen, indem man ein rasch konvergierendes Näherungsverfahren anwendet, das genau der Reihenentwicklung (V; 51) im Falle des

Dreihöhenproblems entspricht. Es ist dann, wie aus (V; 70) folgt, y nahezu gleich der Einheit, während x, z und daher auch u, v von der Ordnung der kleinen Größen Δu, ΔA sind. Schreibt man die Gleichungen (V; 75) in der Form

$$\left.\begin{aligned} F_1 u + D_1 v + B_1 &= -(A_1 u^2 + E_1 uv + C_1 v^2), \\ F_2 u + D_2 v + B_2 &= -(A_2 u^2 + E_2 uv + C_2 v^2), \end{aligned}\right\} \qquad (V; 77)$$

so sind die rechten Seiten von zweiter Ordnung und dürfen daher in erster Näherung vernachlässigt werden. Man erhält also gute Näherungswerte für u, v aus linearen Gleichungen. Verwendet man diese zur Berechnung der quadratischen Glieder auf der rechten Seite, so ergeben sich neue lineare Gleichungen, aus denen verbesserte und meist schon endgültige Werte der Unbekannten hervorgehen.

Damit ist die Aufgabe gelöst, und es sind nur noch einige zusätzliche Bemerkungen notwendig:

1. Die gemeinsame Hauptdeterminante der drei Gleichungssysteme (V; 73) lautet

$$\Delta = |\, a_i, b_i, c_i \,| = -\sin A_1' \sin A_2' \sin A_3' \,|\, \cos\delta_i \cos\tau_i, \cos\delta_i \sin\tau_i, \sin\delta_i \,|.$$

Sie darf nicht verschwinden, sondern soll um der Genauigkeit der Ergebnisse willen möglichst groß sein. Es darf also keines der abgelesenen Azimute A_i' die Werte 0° oder 180° annehmen. Nehmen wir gleichmäßige Verteilung der Azimute an, wie es ja zur Erzielung größter Genauigkeit der Ortsbestimmung empfehlenswert ist, so erreicht der Faktor $\sin A_1' \sin A_2' \sin A_3'$ sein Maximum $\pm \frac{1}{4}$, wenn einer der drei Werte A_i' gleich $\pm \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird. Mit den Ergebnissen der Fehleruntersuchung des vorigen Abschnitts, wonach die drei Azimute — abgesehen von ihrer gleichmäßigen Verteilung über den Horizont — beliebig orientiert sein dürfen, steht dies natürlich nicht in Widerspruch: man kann ja stets erreichen, daß eine der drei Ablesungen A_i' den Wert 90° annimmt, indem man alle A_i' um eine geeignete gemeinsame Konstante vermehrt. Um die gleiche Konstante ergibt dann die Rechnung die Nullpunktskorrektion ΔA zu klein. Oder, anders ausgedrückt: Um die angedeutete Schwierigkeit zu vermeiden, ist es nur nötig, den Azimutkreis bei der Beobachtung so zu klemmen, daß die Ablesung 90° (oder 270°) ungefähr dem Azimut eines der Sterne, z. B. des ersten, entspricht.[1])

2. Soll die Auflösung der biquadratischen Gleichung durch Anwendung des Näherungsverfahrens (V; 77) vermieden werden, so ist Voraussetzung, daß ΔA klein sei. In diesem Falle dürfen die Azimute A_i' nicht, wie oben, durch beliebige Konstante verändert werden. Es ist also notwendig, einen der

---

[1]) Man kann diese Schwierigkeit auch umgehen, wenn man in dem oben beschriebenen Algorithmus zur Auflösung des Systems (V; 69) die Rollen der Größen ξ, η, ζ und x, y, z vertauscht. Die Hauptdeterminante Δ erhält dann den Faktor $\cos A_1' \cos A_2' \cos A_3'$, der für $A_1' = 0$ gerade sein Extremum annimmt.

drei Sterne wirklich in der Nähe des Ersten Vertikals zu beobachten, während die beiden anderen ungefähr 120° im Azimut beiderseits von ihm entfernt sein, auf alle Fälle aber die Nähe des Meridians vermeiden sollten. Auch für die *Zenitdistanz* der drei Sterne (die wir wieder als gleich oder nahezu gleich ansehen wollen) ergeben sich zusätzliche Forderungen, wenn die rasche Konvergenz des Näherungsverfahrens gewährleistet werden soll. Eine nähere Untersuchung dieser Frage, die hier übergangen werden darf, hat ergeben, daß — fast unabhängig von der geographischen Breite — Zenitdistanzen um 50° am vorteilhaftesten sind.

53. Bestimmung von Ortszeit und Polhöhe aus Azimut und Zenitdistanz eines Gestirns

Beobachtet man mit einem Universalinstrument, dessen Aufstellungsfehler, insbesondere die Nullpunktskorrektionen der beiden Kreise, bekannt sind, Azimut und Zenitdistanz eines Gestirns, das man auf den Schnittpunkt des Horizontal- und des Vertikalfadens einstellt, so kann man aus diesen beiden Größen (A, z) Uhrkorrektion und Polhöhe bestimmen.

Aus der ersten der Grundgleichungen (I; 6):

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ \cos\delta \cos t &= \cos z \cos\varphi + \sin z \sin\varphi \cos A, \\ \sin\delta &= \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos A, \end{aligned}\right\} \qquad (V;78)$$

ergibt sich zunächst

$$\sin t = \sin z \sin A \sec\delta.$$

Diese Formel reicht zur Bestimmung von t (und damit von $\Delta u = t - u + \alpha$) völlig aus, obwohl sie keine Tangentenformel ist, denn die folgenden Genauigkeitsbetrachtungen werden zeigen, daß die Fehlereinflüsse am kleinsten sind, wenn die Beobachtung in der Nähe des Meridians angestellt wird, also $\sin t$ klein ist. Aus den beiden letzten Formeln (V; 78) folgt sodann

$$\sin\varphi\,(\cos^2 z + \sin^2 z \cos^2 A) = \cos\delta \cos t \sin z \cos A + \sin\delta \cos z,$$
$$\cos\varphi\,(\cos^2 z + \sin^2 z \cos^2 A) = \cos\delta \cos t \cos z - \sin\delta \sin z \cos A$$

und daher, wenn man durch $\cos\delta \cos t \cos z$ kürzt,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg} z \cos A + \operatorname{tg}\delta \sec t}{1 - \operatorname{tg} z \cos A \operatorname{tg}\delta \sec t}.$$

Setzt man also

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\delta \sec t, \quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg} z \cos A,$$

so erhält man einfach

$$\varphi = \beta + \gamma.$$

Diese Lösung stimmt vollkommen mit dem Ergebnis (V; 11) überein, das wir bei der Behandlung der Standlinienmethode erhalten hatten.

Die günstigsten Beobachtungsbedingungen leitet man aus den Differentialbeziehungen (V; 4) und (V; 56) ab, die man unter Berücksichtigung der letzten beiden Gleichungen (II; 29) auch in der Form

$$\left.\begin{aligned} df &= dz = \cos A\, d\varphi + \cos\delta \sin p\, d\Delta u, \\ dg &= \sin z\, dA = -\cos z \sin A\, d\varphi + \cos\delta \cos p\, d\Delta u, \end{aligned}\right\} \qquad (V; 79)$$

schreiben kann. df und dg bedeuten dabei die Einstellungsfehler auf den Horizontal- bzw. Vertikalfaden des Gesichtsfeldes. Man findet dann

$$d\varphi\,(\cos A \cos p + \sin A \sin p \cos z) = df \cos p - dg \sin p,$$
$$\cos\delta\, d\Delta u\,(\cos A \cos p + \sin A \sin p \cos z) = df \sin A \cos z + dg \cos A.$$

Wendet man Anhang A I (2), erste Formel, auf das Nautische Dreieck an, so zeigt man, daß

$$\cos A \cos p + \sin A \sin p \cos z = \cos t\,.$$

Es ist demnach einfacher

$$d\varphi = (df \cos p - dg \sin p) \sec t,$$
$$\cos\delta\, d\Delta u = (df \sin A \cos z + dg \cos A) \sec t\,.$$

Betrachtet man die Genauigkeiten beider Einstellungen als gleich groß und bezeichnet mit ε den entsprechenden mittleren Fehler, so erhält man in üblicher Weise für den mittleren Fehler des Zenits die Gleichung

$$\varepsilon_\sigma^2 = \varepsilon_\varphi^2 + \cos^2\varphi\, \varepsilon_{\Delta u}^2 = \frac{\varepsilon^2}{\cos^2\delta \cos^2 t}\,[\cos^2\delta + \cos^2\varphi\,(1 - \cos^2\delta \sin^2 t)]\,,$$

wobei die erste Gleichung (V; 78) benutzt wurde. Es ist also

$$\varepsilon_\sigma \geqq \varepsilon \sqrt{1 + \cos^2\varphi}\,,$$

und das Minimum wird erreicht, wenn $\delta = 0$ und $\sin t = 0$ ist, also für Äquatorsterne im Meridian, und zwar in oberer Kulmination, da ja die untere Kulmination für Äquatorsterne immer unter dem Horizont stattfindet.

54. Bestimmung von Ortszeit und Polhöhe aus den Differenzen der Azimute und Zenitdistanzen zweier Sterne

Obwohl die im vorigen Abschnitt beschriebene Methode zu überaus einfachen und handlichen Formeln für die Reduktion der Beobachtungen führt und als einzige Ortsbestimmungsmethode den Vorzug hat, daß Zeit und Polhöhe aus einer einzigen Sterneinstellung und Uhrzeit folgen, wird man sie in der Praxis ungern anwenden, da sie die Kenntnis der Nullpunktskorrektionen der beiden Kreise erfordert. Beobachtet man dagegen Azimut und Zenitdistanz *zweier* Gestirne (oder auch desselben Gestirns zu zwei ver-

schiedenen Zeiten), so benötigt man zur Ortsbestimmung nur die Differenzen der beiden Zenitdistanzen und der beiden Azimute sowie die Differenzen der zugehörigen Uhrzeiten. Als Nebenergebnis erhält man die Korrektionen der Kreise.

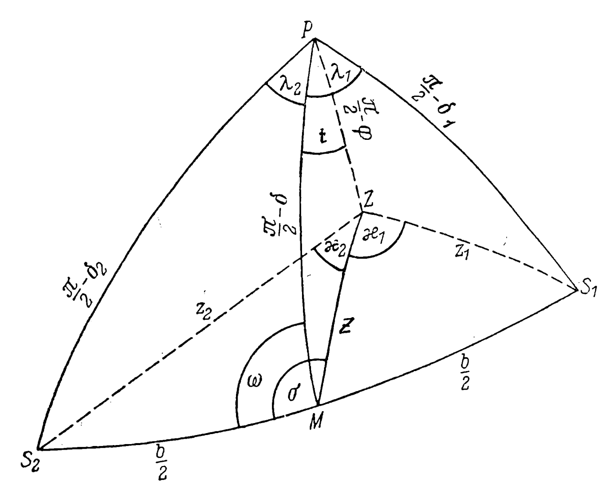


Abb. 46: Ortsbestimmung aus Differenzen der Zenitdistanzen und Azimute zweier Sterne nach Harzer

P. Harzer[1]) löst diese hübsche Aufgabe folgendermaßen: Gegeben seien außer den Koordinaten (α_1, δ_1; α_2, δ_2) der beiden Sterne die gemessenen Differenzen

$$\varkappa = A_2 - A_1,$$
$$\mu = z_2 - z_1 \quad \text{oder} \quad \nu = z_2 + z_1 \,^{2)},$$
$$\lambda = \tau_2 - \tau_1 = (u_2 - u_1) - (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Ferner sei (Abb. 46) M die Mitte des Bogens S_1S_2 zwischen den beiden Sternörtern. Dieser Punkt habe die Deklination δ, den Stundenwinkel t und die Zenitdistanz z. Die Entfernung der beiden Sternörter sei b, und der Stundenkreis von M bilde mit denen von S_1 und S_2 die Winkel λ_1 und λ_2, so daß $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Im Dreieck PS_1S_2 gilt dann

$$\cos b = \sin\delta_1 \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos\lambda =$$
$$= \cos(\delta_2 - \delta_1)\cos^2\frac{\lambda}{2} - \cos(\delta_2 + \delta_1)\sin^2\frac{\lambda}{2}$$

---

[1]) P. Harzer: Über die Bestimmung der Breite und der Uhrkorrektion aus der Beobachtung zweier Sterne an einem Universalinstrument, für das die Indexfehler beider Kreise unbekannt sind. Astron. Nachr. 212, 173.

[2]) ν ist die Differenz der abgelesenen Zenitdistanzen, wenn man das Fernrohr zwischen den beiden Beobachtungen umlegt.

oder

$$\cos^2\frac{b}{2} = \frac{1+\cos b}{2} = \frac{1+\cos(\delta_2-\delta_1)}{2}\cos^2\frac{\lambda}{2} + \frac{1-\cos(\delta_2+\delta_1)}{2}\sin^2\frac{\lambda}{2}$$

oder

$$\cos^2\frac{b}{2} = \cos^2\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\cos^2\frac{\lambda}{2} + \sin^2\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\sin^2\frac{\lambda}{2},$$

ebenso

$$\sin^2\frac{b}{2} = \sin^2\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\cos^2\frac{\lambda}{2} + \cos^2\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\sin^2\frac{\lambda}{2}. \qquad (V;\,80)$$

Durch diese Formeln ist b bekannt, wobei noch zu bemerken ist, daß $\cos\frac{b}{2}$ und $\sin\frac{b}{2}$ stets positiv sind, da $b < 180°$.

In den Dreiecken PMS_1 und PMS_2 ist

$$\cos\delta_1\cos\lambda_1 = \cos\frac{b}{2}\cos\delta + \sin\frac{b}{2}\sin\delta\cos\omega, \quad \text{(a)}$$

$$\cos\delta_1\sin\lambda_1 = \sin\frac{b}{2}\sin\omega, \quad \text{(b)}$$

$$\sin\delta_1 = \cos\frac{b}{2}\sin\delta - \sin\frac{b}{2}\cos\delta\cos\omega, \quad \text{(c)}$$

$$\cos\delta_2\cos\lambda_2 = \cos\frac{b}{2}\cos\delta - \sin\frac{b}{2}\sin\delta\cos\omega, \quad \text{(d)}$$

$$\cos\delta_2\sin\lambda_2 = \sin\frac{b}{2}\sin\omega, \quad \text{(e)}$$

$$\sin\delta_2 = \cos\frac{b}{2}\sin\delta + \sin\frac{b}{2}\cos\delta\cos\omega. \quad \text{(f)}$$

Durch Multiplikation von (a) und (e) bzw. (b) und (d) erhält man

$$\cos\delta_1\cos\delta_2\cos\lambda_1\sin\lambda_2 = \sin\frac{b}{2}\sin\omega\left(\cos\frac{b}{2}\cos\delta + \sin\frac{b}{2}\sin\delta\cos\omega\right), \quad \text{(g)}$$

$$\cos\delta_1\cos\delta_2\sin\lambda_1\cos\lambda_2 = \sin\frac{b}{2}\sin\omega\left(\cos\frac{b}{2}\cos\delta - \sin\frac{b}{2}\sin\delta\cos\omega\right). \quad \text{(h)}$$

Dann folgt:

$$(f)-(c):\quad \cos\delta\cos\omega = \sin\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\operatorname{cosec}\frac{b}{2},$$

$$(g)+(h):\quad \cos\delta\sin\omega = \cos\delta_1\cos\delta_2\sin\lambda\operatorname{cosec} b,$$

$$(f)+(c):\quad \sin\delta = \sin\frac{\delta_2+\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\sec\frac{b}{2}. \qquad (V;\,81)$$

Ferner ergibt sich aus (b) — (e):

$$\cos\delta_1 \sin\lambda_1 - \cos\delta_2 \sin\lambda_2 = 0$$

und wegen

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2+\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2-\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_2+\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2+\lambda_1}{2} = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$$

nach kurzer Rechnung

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2} = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta_2+\delta_1}{2}, \qquad \text{(V; 82)}$$

womit neben $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ auch $\lambda_2 - \lambda_1$ und somit λ_1, λ_2 einzeln bekannt sind.

Die Gleichungen (V; 80) bis (V; 82) lassen sich auch ganz entsprechend für die Dreiecke ZS_1S_2, ZMS_1 und ZMS_2 aufstellen. Hierbei tritt Z an die Stelle von P und daher $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2, z_1, z_2, z, \sigma$ an die Stelle von $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $\frac{\pi}{2} - \delta_1$, $\frac{\pi}{2} - \delta_2$, $\frac{\pi}{2} - \delta, \omega$.

Infolgedessen ist auch $\frac{\delta_2-\delta_1}{2}$ durch $\frac{z_1-z_2}{2} = -\frac{\mu}{2}$ und $\frac{\delta_2+\delta_1}{2}$ durch $\frac{\pi}{2} - \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\nu}{2}$ zu ersetzen, und man erhält

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\frac{b}{2} &= \cos^2\frac{\mu}{2}\cos^2\frac{\varkappa}{2} + \cos^2\frac{\nu}{2}\sin^2\frac{\varkappa}{2},\\
\sin^2\frac{b}{2} &= \sin^2\frac{\mu}{2}\cos^2\frac{\varkappa}{2} + \sin^2\frac{\nu}{2}\sin^2\frac{\varkappa}{2},
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V; 83)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin z \cos\sigma &= -\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}\operatorname{cosec}\frac{b}{2},\\
\sin z \sin\sigma &= \sin z_1 \sin z_2 \sin\varkappa \operatorname{cosec} b =\\
&= \frac{1}{2}(\cos\mu - \cos\nu)\sin\varkappa \operatorname{cosec} b,\\
\cos z &= \cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}\sec\frac{b}{2},
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V; 84)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\varkappa}{2}\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}. \qquad \text{(V; 85)}$$

mI Dreieck PZM ist sodann

$$\begin{aligned}
\cos\varphi\cos t &= \cos z\cos\delta - \sin z\sin\delta\cos(\sigma-\omega),\\
\cos\varphi\sin t &= \sin z\sin(\sigma-\omega),\\
\sin\varphi &= \cos z\sin\delta + \sin z\cos\delta\cos(\sigma-\omega).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (V; 84) wären z, σ und damit φ, t berechenbar, wenn gleichzeitig μ und ν gegeben wären. Nun ist zwar nur eine dieser beiden Größen durch Beobachtung bekannt, die fehlende folgt aber aus den Gleichungen (V; 83), wobei zu beachten ist, daß $\frac{\mu}{2}$ und $\frac{\nu}{2}$ im ersten Quadranten liegen.

Mit μ, ν sind z_1, z_2 bekannt und es wird möglich, durch Vergleich mit den abgelesenen Zenitdistanzen den Nullpunktsfehler des Höhenkreises zu bestimmen. Um auch die Nullpunktskorrektion des Azimutkreises zu berechnen, benutzt man die Größen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, die aus $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa$ und (V; 85) folgen. Ferner braucht man das Azimut A des Vertikals ZM, das aus PZM mit Hilfe der Formel (III; 17)

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin t}{\operatorname{tg} \delta \cos \varphi - \cos t \sin \varphi}$$

erhalten wird. Damit ergeben sich die wahren Azimute der Sterne:

$$A_1 = A - \varkappa_1, \quad A_2 = A + \varkappa_2$$

und durch Vergleich mit den abgelesenen Azimuten die Kreiskorrektion. Ebenso folgt die Uhrkorrektion Δu aus t, denn es ist ja

$$t_1 = t - \lambda_1, \quad t_2 = t + \lambda_2,$$

also

$$\Delta u = \frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = t + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}.$$

Die Untersuchung der Fehlereinflüsse führen wir nach Harzer folgendermaßen durch: Wenden wir die Differentialformeln (V; 4), (V; 56) auf die beiden Sterne ($i = 1{,}2$) an, so erhalten wir

$$dz_i = \cos A_i d\varphi + \sin A_i \cos \varphi d\Delta u,$$

$$dA_i = -\operatorname{ctg} z_i \sin A_i d\varphi + (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} z_i \cos A_i) \cos \varphi d\Delta u;$$

Es ist also

$$\left.\begin{aligned} d\varkappa &= dA_2 - dA_1 = -(\operatorname{ctg} z_2 \sin A_2 - \operatorname{ctg} z_1 \sin A_1)\, d\varphi + \\ &\qquad + (\operatorname{ctg} z_2 \cos A_2 - \operatorname{ctg} z_1 \cos A_1) \cos \varphi d\Delta u, \\ d\mu &= dz_2 - dz_1 = (\cos A_2 - \cos A_1)\, d\varphi + \\ &\qquad + (\sin A_2 - \sin A_1) \cos \varphi d\Delta u, \\ d\nu &= dz_2 + dz_1 = (\cos A_2 + \cos A_1)\, d\varphi + \\ &\qquad + (\sin A_2 + \sin A_1) \cos \varphi d\Delta u. \end{aligned}\right\} \quad \text{(V; 86)}$$

Betrachten wir $\varkappa$ und μ als beobachtete Größen und $d\varkappa$, $d\mu$ als ihre Fehler, so folgt aus den ersten beiden Gleichungen (V; 86)

$$d\varphi = \frac{-d\varkappa (\sin A_2 - \sin A_1) + d\mu (\operatorname{ctg} z_2 \cos A_2 - \operatorname{ctg} z_1 \cos A_1)}{(\operatorname{ctg} z_1 + \operatorname{ctg} z_2)\,[1 - \cos (A_2 - A_1)]}$$

$$\cos \varphi d\Delta u = \frac{d\varkappa (\cos A_2 - \cos A_1) + d\mu (\operatorname{ctg} z_2 \sin A_2 - \operatorname{ctg} z_1 \sin A_1)}{(\operatorname{ctg} z_1 + \operatorname{ctg} z_2)\,[1 - \cos (A_2 - A_1)]}.$$

Bezeichnet man wieder mit ε den mittleren Einstellungsfehler auf beide Fäden (indem man die Einstellung auf den Horizontal- und den Vertikalfaden als gleich genau ansieht), so ist offenbar

$$\varepsilon_\varkappa^2 = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\sin^2 z_1} + \frac{1}{\sin^2 z_2} \right), \quad \varepsilon_\mu^2 = \varepsilon_\nu^2 = 2\,\varepsilon^2$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma^2 &= \varepsilon_\varphi^2 + \cos^2\varphi\, \varepsilon_{\varDelta u}^2 \\ &= \frac{2\,\varepsilon_\varkappa^2 (1 - \cos\varkappa) + \varepsilon_\mu^2 (\operatorname{ctg}^2 z_1 + \operatorname{ctg}^2 z_2 - 2 \operatorname{ctg} z_1 \operatorname{ctg} z_2 \cos\varkappa)}{(\operatorname{ctg} z_1 + \operatorname{ctg} z_2)^2 (1 - \cos\varkappa)^2}. \end{aligned}$$

Man bemerkt zunächst, daß man, um den Fehler möglichst zu verkleinern, $\cos\varkappa = -1$, also $A_2 - A_1 = \pi$ zu setzen hat, d. h. die beiden Sterne sollen im selben Vertikal auf verschiedenen Seiten des Zenits beobachtet werden. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich bei Erweiterung des Bruches mit $\sin^2 z_1 \sin^2 z_2$ nach kurzer Reduktion

$$\varepsilon_\sigma^2 = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin^2 z_1 + \sin^2 z_2}{\sin^2 (z_1 + z_2)} \right).$$

Das Minimum dieses Ausdrucks tritt ein, wenn $z_1 = z_2 = z$ gesetzt wird [vgl. (III; 32) und (IV; 27)], und es ist dann

$$\varepsilon_\sigma^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + \sec^2 z).$$

Für kleine z nähert sich also ε_σ dem günstigsten Wert ε.

Legt man das Fernrohr zwischen den Beobachtungen um, sind also $\varkappa$ und ν als Beobachtungsdaten gegeben, so gelangt man auf demselben Wege zu dem Ergebnis, daß $\cos\varkappa = 1$, also $A_2 = A_1$ gesetzt werden muß. Die Sterne sind also wiederum möglichst im gleichen Vertikal, aber auf derselben Seite vom Zenit zu beobachten. Unter dieser Annahme erhält man die Formel

$$\varepsilon_\sigma^2 = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} + G \right), \qquad G = \frac{\sin^2 z_1 + \sin^2 z_2}{\sin^2 (z_2 - z_1)},$$

die dem Minimum $\varepsilon_\sigma^2 = \frac{3}{2}\,\varepsilon^2$ zustrebt, wenn eine der Zenitdistanzen gegen null geht, während die andere an sich beliebig sein darf. Es ist aber darauf zu achten, daß die Differenz $z_2 - z_1$ nicht zu klein ist, da die Funktion G für $z_1 = z_2$ unendlich groß wird und an der Stelle $z_1 = z_2 = 0$ die unbestimmte Form $0:0$ annimmt.

55. Ortsbestimmung mit Hilfe der parallaktischen Winkel

Harzer[1]) und Wilkens[2]) haben darauf aufmerksam gemacht, daß man Ortsbestimmungen auch durchführen kann, wenn die *parallaktischen Winkel* der Gestirne als Beobachtungsdaten gegeben sind. Natürlich lassen sich diese nicht unmittelbar an Instrumenten ablesen, die zur Messung von Zenitdistanzen und Azimuten dienen. Es kann aber gezeigt werden, daß die parallaktischen Winkel mit Hilfe des Universalinstruments auf folgende indirekte Weise erhalten werden:

Nach (II; 28) sind

$$\frac{df}{dt} = \frac{dz}{dt} = \cos\delta \sin p\,, \qquad \frac{dg}{dt} = \sin z \frac{dA}{dt} = \cos\delta\cos p \qquad \text{(V; 87)}$$

die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Abstände der Sterne vom Horizontal- bzw. Vertikalfaden des Gesichtsfeldes ändern. Es ist also

$$\frac{df}{dg} = \operatorname{tg} p\,.$$

Der parallaktische Winkel p ist daher nichts anderes als der auf die Horizontale bezogene Richtungswinkel der Tangente an der scheinbaren Bahn des Sterns durch das Gesichtsfeld. Bei äquatornahen Sternen kann das kurze Stück der scheinbaren Bahn, das man beobachtet, als geradlinig angesehen werden — hier ist also p die Neigung der Sternbahn selbst und kann auf einen beliebigen Zeitpunkt innerhalb der Dauer des Durchgangs bezogen werden. Bei Sternen höherer Deklination erscheint die Sternbahn gekrümmt, in diesem Falle ist p die Richtung der Sehne zwischen zwei Bahnpunkten und kann ohne wesentlichen Fehler dem arithmetischen Mittel der beiden Zeitpunkte zugeschrieben werden, die den Enden der Sehne entsprechen.

Nach diesem Prinzip kann man p auf zwei Arten praktisch bestimmen:

1. Es seien im Gesichtsfeld zwei vertikale Fäden mit bekanntem Abstand (etwa $dg = 10^s = 150''$) ausgespannt und ein Mikrometer mit horizontalem Meßfaden vorhanden. Man stelle den Meßfaden auf den Stern ein, während er die beiden Vertikalfäden überschreitet. Ist dann df die wegen differentieller Refraktion korrigierte und in Bogensekunden ausgedrückte Differenz der beiden Mikrometerablesungen, so ist $p = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{df}{dg}\right)$ der parallaktische Winkel, der bis auf unmerkliche Abweichungen der Mitte zwischen den beiden Messungszeiten zuzuordnen ist.

---

[1]) P. Harzer: Über das Problem der drei parallaktischen Winkel und die Verwendung des Problemes bei einer Methode der geographischen Ortsbestimmung ohne astronomische Instrumente. Astron. Nachr. 193, 147.

[2]) A. Wilkens: Neue Prinzipe und Methoden der geographischen Ortsbestimmung. Astron. Nachr. 195, 49.

2. Man bringe in der Fokalebene des Fernrohrobjektivs eine photographische Kassette an. Bei längerer Belichtung wird auf der Platte die scheinbare Bahn des Sterns als mehr oder weniger gekrümmte Schwärzungsspur erscheinen, deren Endpunkte dem Anfang und Ende der Belichtungszeit entsprechen. Wenn die Kassette so orientiert ist, daß ein Kantenpaar der Platte stets der Kippachse des Fernrohrs parallel bleibt, und wenn dafür gesorgt wird, daß die Kippachse stets horizontal liegt, dann lassen sich die parallaktischen Winkel durch Ausmessung der Sternspuren leicht finden. Wilkens hat das zur Auswertung solcher Aufnahmen notwendige Verfahren a. a. O. erschöpfend beschrieben. Harzer benutzt bei seiner Methode nur die Differenzen der parallaktischen Winkel und kann infolgedessen die Bezugsrichtung auf der Platte willkürlich annehmen.

Im Nautischen Dreieck gelten die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \sin z \sin p &= \cos\varphi \sin t\,, \\ \sin z \cos p &= \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t\,. \end{aligned}\right\} \qquad (V;88)$$

Eliminiert man hieraus $\sin z$, so ergibt sich die allen in diesem Abschnitt zu beschreibenden Methoden zugrunde liegende Formel

$$\sin p\,(\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t) = \cos p \cos\varphi \sin t\,; \qquad (V;89)$$

Über alle Methoden der Ortsbestimmung, die sich auf die Messung absoluter oder relativer parallaktischer Winkel stützen, hat Wilkens in der oben zitierten Arbeit eine vollständige Übersicht gegeben. Auf sie sei der Leser verwiesen, der sich für diese theoretisch interessanten, aber in der Praxis ungebräuchlichen Methoden besonders interessiert. Hier begnügen wir uns damit, die wichtigsten von ihnen kurz zu skizzieren:

A. Die Messung des absoluten parallaktischen Winkels eines Sterns (α, δ) genügt zur Bestimmung des Uhrstandes bei bekannter Polhöhe oder der Polhöhe bei bekannter Zeit. Für die erste dieser Aufgaben liefert (V; 89) eine Gleichung von der Form

$$a \cos t + b \sin t = c,$$

aus der t nach den Methoden in Anhang C bestimmt werden kann. Die Lösung der zweiten Aufgabe,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg} p \sec\delta \sin t + \operatorname{tg}\delta \cos t \qquad (V;90)$$

folgt direkt aus (V; 89).

Differenziert man (V; 88), indem man nur δ als konstant ansieht, so folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos z \sin p\,dz + \sin z \cos p\,dp &= -\sin\varphi \sin t\,d\varphi + \cos\varphi \cos t\,dt\,, \\ \cos z \cos p\,dz - \sin z \sin p\,dp &= (\cos\varphi \cos\delta + \sin\varphi \sin\delta \cos t)\,d\varphi + \\ &\quad + \cos\varphi \sin\delta \sin t\,dt\,. \end{aligned}$$

Eliminiert man hieraus dz, so ergibt sich zunächst

$$\sin z\, dp = -d\varphi\, [\sin\varphi\, (\cos p \sin t + \sin p \cos t \sin\delta) + \cos\varphi \sin p \cos\delta] + \\ + \cos\varphi\, dt\, (\cos p \cos t - \sin p \sin t \sin\delta)$$

und, da zufolge Anhang A I (2) im Nautischen Dreieck

$$\cos p \cos t - \sin p \sin t \sin\delta = \cos A,$$
$$\cos p \sin t + \sin p \cos t \sin\delta = \sin A \sin\varphi,$$
$$\sin p \cos\delta = \sin A \cos\varphi,$$

so erhält man schließlich

$$\sin z\, dp = -\sin A\, d\varphi + \cos A \cos\varphi\, dt \qquad (V; 91)$$

als Grundgleichung für alle Fehlerbetrachtungen, die Ortsbestimmungen aus parallaktischen Winkeln betreffen. Für die oben beschriebenen einfachen Aufgaben folgt ($dt = d\Delta u$)

$$\cos\varphi\, d\Delta u = \frac{\sin z\, dp}{\cos A} \quad \text{bzw.} \quad d\varphi = -\frac{\sin z\, dp}{\sin A}. \qquad (V; 92)$$

Die Zeitbestimmung ist also im Meridian, die Polhöhenbestimmung im Ersten Vertikal am genauesten. Die Formeln (V; 92) erwecken außerdem den Anschein, als ob, wegen des Faktors $\sin z$, die Fehlereinflüsse mit abnehmender Zenitdistanz gegen null streben, so daß also, fehlerfreies α und δ vorausgesetzt, die Genauigkeit der Zeit- oder Polhöhenbestimmung durch Beobachtung in möglichst kleinen Zenitdistanzen beliebig gesteigert werden könnte. Das ist natürlich ein Fehlschluß, den folgende Überlegung leicht beseitigt:

Es sei (Abb. 47) SH der größte Kreis der Sphäre, der den Sternort S (zur Zeit der Beobachtung) mit denjenigen Punkten verbindet, in denen die Verlängerung der Horizontalachse (Kippachse) des Instruments die Sphäre trifft. SQ (senkrecht auf SH) sei der zu diesen beiden „Achsenpolen" gehörige „Achsenäquator". Im Gesichtsfeld des Fernrohrs bedeuten dann SH und SQ offenbar die als fehlerfrei angesehenen Richtungen des Horizontal- und Vertikalfadens. SS' sei die Richtung der scheinbaren Sternbewegung, p der parallaktische Winkel. Ist nun die Richtung der Kippachse genau horizontal, so geht der Größtkreis, der durch den Vertikalfaden SQ bezeichnet wird, genau durch das Zenit Z. Hat jedoch die Achse eine Neigung di, so geht dieser Größtkreis an Z im Abstand $ZQ = di$ vorbei, und dem gemessenen parallaktischen Winkel p haftet dann der Fehler dp an, für den im rechtwinkligen Dreieck SZQ die Gleichung $\sin z \sin dp = \sin di$ oder, wenn di und dp klein sind,

$$\sin z\, dp = di \qquad (V; 93)$$

gilt. Unter der Voraussetzung, daß der gemessene Winkel p und die Neigung des Horizontalfadens SH fehlerfrei sind, stellt also der gemeinsame Zähler

der Formeln (V; 92) den Nivellierungsfehler der Kippachse dar, deren horizontale Lage ja bei jeder Beobachtung mit Hilfe der Libelle kontrolliert werden muß. Einen Fehler in der Bestimmung von p und der Neigung des Horizontalfadens, auf dessen Richtung die Messung von p bezogen wird, kann man immer mit Hilfe der Beziehung (V; 93) auf einen Nivellierungsfehler di zurückführen bzw. mit einem solchen vereinigen. Man schreibt statt (V; 92) also besser

$$\cos\varphi\, d\Delta u = \frac{di}{\cos A};$$

$$d\varphi = -\frac{di}{\sin A}.$$

Unter den günstigsten Bedingungen sind also diese Fehler von der Größenordnung des Fehlers der Bestimmung der Achsenneigung, gegebenenfalls vermehrt um einen Fehler von der Form $\sin z\, dp$.

Abb. 47: Ortsbestimmung aus parallaktischen Winkeln. Fehlereinflüsse

B. Aus den parallaktischen Winkeln zweier Sterne lassen sich Zeit und Polhöhe gemeinsam bestimmen. Wendet man (V; 90) auf zwei Sterne S_1, S_2 an, so ergeben sich zwei Ausdrücke für tg φ, die einander gleich gesetzt werden können. Es ist also

$$\operatorname{ctg} p_1 \sec\delta_1 \sin t_1 + \operatorname{tg}\delta_1 \cos t_1 = \operatorname{ctg} p_2 \sec\delta_2 \sin t_2 + \operatorname{tg}\delta_2 \cos t_2 .$$

Setzt man hierin $t_1 = \tau_1 + \Delta u$, $t_2 = \tau_2 + \Delta u$, so erhält man eine Formel für tg Δu. Die Polhöhe folgt dann aus (V; 90).

Zur Bestimmung der Fehlereinflüsse dienen die Gleichungen (V; 91), (V; 93)

$$di_1 = -\sin A_1\, d\varphi + \cos A_1 \cos\varphi\, d\Delta u,$$
$$di_2 = -\sin A_2\, d\varphi + \cos A_2 \cos\varphi\, d\Delta u,$$

aus denen

$$d\varphi = \frac{di_1 \cos A_2 - di_2 \cos A_1}{\sin(A_2 - A_1)},$$

$$\cos\varphi\, d\Delta u = \frac{di_1 \sin A_2 - di_2 \sin A_1}{\sin(A_2 - A_1)},$$

folgt. Werden die beiden Sterne in gleicher Zenitdistanz beobachtet, so darf man annehmen, daß die Fehler di_1, di_2 von gleicher Größenordnung ε sind. Man erhält dann für den mittleren Zenitfehler

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{|\sin(A_2 - A_1)|}.$$

Die beiden Sterne sind also in beliebigen, aber möglichst um 90° verschiedenen Azimuten zu beobachten.

C. Bei den bisher beschriebenen Methoden wurden die *absoluten* parallaktischen Winkel als Ausgangsdaten verwendet, es wurde also der Neigungsfehler des Horizontalfadens als bekannt vorausgesetzt. Durch Vermehrung der Beobachtungen läßt sich dieser Neigungsfehler eliminieren bzw. mitbestimmen. Man benutzt dann lediglich die Kenntnis der *Differenzen* der parallaktischen Winkel. So läßt sich aus der Differenz der parallaktischen Winkel zweier Sterne die eine der Größen φ oder Δu bestimmen, wenn die andere bekannt ist. Ferner kann man φ und Δu gleichzeitig ermitteln, wenn man zwei Paare von Sternen beobachtet. Die Lösung dieser Aufgaben, die man auch bei Wilkens (loc. cit.) findet, ist leicht und kann dem Leser zur Übung überlassen bleiben.

Die letztgenannte Aufgabe läßt sich natürlich auch durchführen, wenn man nur drei Sterne beobachtet hat. Die gemessenen Winkel p_i' beziehen sich dann auf eine beliebige Richtung im Gesichtsfeld, und die Unbekannten sind φ, Δu und die Abweichung Δp dieser Bezugsrichtung von der Horizontalen. Ist die Bezugsrichtung die des Horizontalfadens, so stellt Δp die kleine Neigungskorrektion dieses Fadens dar.

Dieses *Problem der drei parallaktischen Winkel*, das dem Problem der drei Azimute verwandt ist, wurde von Harzer, Wilkens und dem Verfasser entwickelt und von ersterem in eine bezüglich der drei Sterne vollkommen symmetrische Form gebracht. Bei Anwendung der photographischen Beobachtungsmethode entsprechen die Differenzen der parallaktischen Winkel, von kleinen Korrektionen abgesehen, den Winkeln des von den drei Sternspuren gebildeten Dreiecks — das zur Auswertung der Photogramme notwendige Reduktionsverfahren hat Wilkens in der oben genannten Abhandlung beschrieben.

In Anlehnung an die in Abschnitt 52 beschriebene Lösung des Dreiazimutproblems läßt sich das Problem der drei parallaktischen Winkel folgendermaßen behandeln: Schreibt man die Grundgleichung (V; 90) für drei Sterne ($i = 1, 2, 3$) auf und setzt

$$t_i = \tau_i + \Delta u, \quad p_i = p_i' + \Delta p,$$

so erhält man, wie in Abschnitt 52, Gleichungen von der Form (V; 69)

$$a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta = u_i x + v_i y + w_i z,$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_i &= \sin p_i' \sin \tau_i - \cos p_i' \cos \tau_i \sin \delta_i, \\
b_i &= \sin p_i' \cos \tau_i + \cos p_i' \sin \tau_i \sin \delta_i, \\
c_i &= \cos p_i' \cos \delta_i, \\
u_i &= \cos p_i' \sin \tau_i + \sin p_i' \cos \tau_i \sin \delta_i, \\
v_i &= \cos p_i' \cos \tau_i - \sin p_i' \cos \tau_i \sin \delta_i, \\
w_i &= -\sin p_i' \cos \delta_i
\end{aligned}$$

und den Unbekannten

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sin \varDelta p \cos \varDelta u, & x &= \cos \varDelta p \cos \varDelta u, \\ \eta &= \sin \varDelta p \sin \varDelta u, & y &= \cos \varDelta p \sin \varDelta u, \\ \zeta &= \sin \varDelta p \operatorname{tg} \varphi, & z &= \cos \varDelta p \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (V; 94)$$

zwischen denen noch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \eta x - \xi y &= 0, \\ \zeta x - \xi z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (V; 95)$$

bestehen. Wie in Abschnitt 52 bestimmt man dann die neun Hilfsgrößen $\xi_1 \ldots\ldots \zeta_3$ aus den drei linearen Gleichungssystemen (V; 73), und es gelten dann die Beziehungen (V; 74). Setzt man diese in (V; 95) ein und setzt

$$u = \frac{y}{x}, \qquad v = \frac{z}{x}, \qquad (V; 96)$$

so entstehen die quadratischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_2 u^2 + \xi_3 uv + (\xi_1 - \eta_2)\, u - \eta_3 v - \eta_1 &= 0, \\ \xi_3 v^2 + \xi_2 uv - \zeta_2 u + (\xi_1 - \zeta_3)\, v - \zeta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$v = \frac{\xi_2 u^2 + (\xi_1 - \eta_2)\, u - \eta_1}{\eta_3 - \xi_3 u}. \qquad (V; 97)$$

Setzt man dies in die zweite ein und multipliziert mit dem Quadrat des Nenners $\eta_3 - \xi_3 u$, so entsteht eine Gleichung *dritten* Grades für u, die leicht durch Näherungsmethoden auflösbar ist, da ja $u = \operatorname{tg} \varDelta u$ gewöhnlich eine kleine Größe ist. Hierauf folgt v aus (V; 97), und es ist schließlich wegen (V; 94), (V; 96) und (V; 74)

$$\operatorname{tg} \varDelta u = \frac{y}{x} = u, \qquad \operatorname{tg} \varDelta p = \frac{\xi}{x} = \xi_1 + \xi_2 u + \xi_3 v,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{x} \cos \varDelta u = v \cos \varDelta u = \frac{v}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Die Fehlerbetrachtungen, die hier übergangen werden können, ergeben für die Ortsbestimmung größte Genauigkeit, wenn die Zenitdistanzen der drei Sterne gleich und einigermaßen klein sind, und wenn die drei Azimute gleichmäßig über den Horizont verteilt sind. Sind $\varDelta u$ und $\varDelta p$ klein, so empfiehlt es sich, die Sterne in den Azimuten 0°, ± 120° zu beobachten, damit die Determinante der Gleichungen (V; 73) möglichst groß werde.

VI. KAPITEL

BESTIMMUNG DER GEOGRAPHISCHEN LÄNGE

56. Hilfsmittel und Wege zur Längenbestimmung

Am Ende des 10. Abschnitts haben wir die astronomischen Grundlagen der geographischen Ortsbestimmung in drei Sätzen zusammengefaßt. Der letzte dieser Sätze liefert das Prinzip der Bestimmung der geographischen Länge eines Erdorts. Nach ihm ist die Differenz der geographischen Längen zweier Orte gleich der Differenz ihrer Ortszeiten zu einem gegebenen Zeitpunkt und die absolute Länge gleich der Differenz der Ortszeit in Greenwich gegen die gleichzeitige Ortszeit am Beobachtungsort. Es ist dabei gleichgültig, ob es sich um Sternzeit oder mittlere Sonnenzeit handelt.

Ist die Ortszeit am Beobachtungsort mittels einer der im dritten oder fünften Kapitel beschriebenen Methoden bestimmt worden, so ist damit gleichzeitig auch die geographische Länge bekannt, falls der Beobachter eine nach Weltzeit (oder nach der mittleren oder der Sternzeit eines beliebigen festen Meridians) gehende Uhr zur Hand hat. Der Seemann nimmt zu diesem Zwecke ein Schiffschronometer (oder besser mehrere) mit auf die Reise, dessen Stand gegen Weltzeit er zu Beginn der Fahrt geprüft hat und dessen Gang (d. h. zeitliche Veränderung des Standes, also Betrag des täglichen Vor- oder Nachgehens) ihm bekannt ist. Unter der Annahme, daß der Uhrgang sich während der Reise nicht ändert, steht ihm also die Weltzeit jederzeit zur Verfügung, und die astronomische Bestimmung der Ortszeit auf See ergibt somit ohne weiteres auch die geographische Länge. Nehmen wir an, daß die Schiffsuhr genau Weltzeit anzeigt und diesen Stand nicht ändert, und benutzt man sie unterwegs als Arbeitsuhr bei einer Bestimmung der Ortszeit, so ist die gefundene Uhrkorrektion

$$\Delta u = -\lambda,$$

wobei die geographische Länge λ, wie immer, westlich von Greenwich *positiv* zu rechnen ist.

In Wirklichkeit wird der Stand der Uhr sich während der Reise ändern, und zwar nicht gleichförmig, so daß die Berücksichtigung des Ganges nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit möglich ist. Insbesondere werden große Temperaturänderungen, wie sie namentlich auf Seereisen vorkommen, die sich über große Breitenunterschiede erstrecken, den Gang der Uhren in

nicht sicher kontrollierbarer Weise beeinflussen.[1]) Es ist daher wünschenswert, den Uhrstand auch während der Fahrt von Zeit zu Zeit unter Kontrolle zu halten. Natürlich kommt es auch vor (z. B. wenn die Uhr unterwegs stehen geblieben ist), daß der Beobachter zu einer völlig neuen Bestimmung der Weltzeit gezwungen ist.

Ist der Beobachter mit einem Rundfunkempfangsgerät ausgerüstet, so bereitet der Uhrvergleich mit Weltzeit keine Schwierigkeiten. Es ist nur erforderlich, eines der Zeitzeichen abzuhören, die von allen größeren Sendestationen zu bestimmten Zeiten ausgestrahlt werden. Diese Signale, die von Sternwarten gesteuert werden, liefern Weltzeit oder Zonenzeit mit einer für die meisten Zwecke der Ortsbestimmung mehr als ausreichenden Genauigkeit.

Vor der Erfindung der Funkentelegraphie war die Längenbestimmung bzw. die Kontrolle der Weltzeituhren auf Reisen nur mit Hilfe astronomischer Beobachtungen möglich. Diese astronomischen Methoden der Längenbestimmung haben heute an praktischer Bedeutung wesentlich eingebüßt, zumal sie auch an Genauigkeit mit der Technik der telegraphischen und funkentelegraphischen Zeitübertragung nicht wetteifern können. Für den Theoretiker sind sie aber nach wie vor interessant, und es kommt natürlich auch heute noch vor, daß der Praktiker auf sie zurückgreifen muß, wenn die technischen Hilfsmittel zum Funkempfang fehlen oder versagen.

Das Grundprinzip der astronomischen Längenbestimmung ist die Beobachtung astronomischer Ereignisse, die für alle Orte der Erdoberfläche gleichzeitig stattfinden, und deren Eintrittszeiten bekannt und in den astronomischen Jahrbüchern nach Weltzeit vermerkt sind. Der sehr enge Bereich solcher Ereignisse läßt sich bedeutend erweitern, wenn man auch Vorgänge mit einbezieht, deren Eintrittszeiten von der geographischen Lage des Beobachtungsorts abhängen, aber nach bekannten Gesetzen und mit so kleinem Betrage, daß eine genäherte Kenntnis der geographischen Koordinaten schon genügt, um die erforderlichen Korrektionen zu berechnen.

Die erstere dieser beiden Arten von Vorgängen beschränkt sich fast ausschließlich auf die echten Finsterniserscheinungen im Sonnensystem, also auf die *Mondfinsternisse* und die *Verfinsterungen der Jupitertrabanten.* Für die Bestimmung der Längendifferenz von Orten, die nicht sehr weit voneinander entfernt sind, kommt auch die Beobachtung des Aufleuchtens oder besser des Erlöschens von hellen Sternschnuppen in Frage.

Mondfinsternisse sind verhältnismäßig selten und können daher nur bei sich bietender Gelegenheit zur Längenbestimmung benutzt werden. Infolge der Unschärfe des Erdschattenrandes ist die Genauigkeit, mit der die Finsterniszeiten (Beginn und Ende der partiellen und totalen Verfinsterung) erfaßt werden können, ziemlich gering. Etwas genauer lassen sich die Ein- und Austritte einzelner Krater in den (bzw. aus dem) Kernschatten beobachten, aber auch hier sind Fehler von der Größenordnung einer oder meh-

[1]) Bis zu einem gewissen Grade läßt sich der Einfluß der Temperaturschwankungen auf den Gang der Uhr nach Formeln berechnen, die für jede Uhr individuell und auf empirischem Wege bestimmt werden.

rerer Zeitminuten möglich. Die Verfinsterungen der vier großen Jupitermonde sind ziemlich häufig, da diese Körper bei jedem ihrer Umläufe um den Planeten, die zwischen rund 2 und 16 Tagen liegen, dessen Schatten durchqueren.[1]) Nur während einiger Monate um die Zeit der Konjunktion des Jupiter mit der Sonne sind diese Erscheinungen nicht sichtbar. Zur Beobachtung der Verfinsterungen bedarf man eines nicht allzu schwachen Fernrohrs — besonders die Schatteneintritte und -austritte des innersten der vier Monde, die stets in großer Nähe der hell leuchtenden Planetenscheibe stattfinden, sind nicht sehr leicht zu beobachten. Und gerade sie liefern die genauesten Zeiten, da der innerste Mond (Umlaufzeit $<$ 2 Tage) sich rasch bewegt und der Vorgang der Verdunkelung sich daher in kurzer Zeit, in Bruchteilen einer Zeitminute, abspielt. Der äußerste Mond (Umlaufzeit $>$ 16 Tage) verschwindet dagegen nur langsam im Planetenschatten und taucht ebenso langsam wieder aus der Dunkelheit auf. Die Verfinsterungen dieses Trabanten, die auch in kleineren Fernrohren beobachtet werden können, sind also nicht sehr häufig und liefern wesentlich ungenauere Zeiten.

Zu den Erscheinungen, deren Eintrittszeiten vom geographischen Standort des Beobachters merklich abhängig sind, und die daher erst nach Anwendung eines mehr oder weniger komplizierten Reduktionsverfahrens (Berücksichtigung der Mondparallaxe) zur Längenbestimmung dienen können, gehören in erster Linie die uneigentlichen Finsternisse oder *Bedeckungen*. Es sind dies die Vorübergänge des *Mondes* vor der Sonne (Sonnenfinsternisse) oder vor Fixsternen oder Planeten (Sternbedeckungen), ferner die Vorübergänge der *Venus* oder des *Merkur* vor der Sonne, die hier aber nur erwähnt werden sollen, da sie selten sind. Aus demselben Grunde dürfen auch die Sonnenfinsternisse als Hilfsmittel zur Längenbestimmung übergangen werden. Wichtig dagegen sind die *Sternbedeckungen durch den Mond*, von denen fast in jedem Monat einige zu beobachten sind. Sie geben zu einer der genauesten astronomischen Methoden zur Ermittlung der geographischen Länge Anlaß — besonders, wenn man das plötzliche Verschwinden von Fixsternen hinter dem *dunklen* Mondrand beobachtet, dessen Zeitpunkt auf Bruchteile einer Sekunde genau erfaßbar ist. Die Sterne, die der Mond auf seinem Wege verdeckt, sind allerdings in der überwiegenden Mehrzahl lichtschwach, so daß schon ein größeres Fernrohr zur Beobachtung der Bedeckung notwendig ist, namentlich um die Vollmondszeit, wenn die Helligkeit der Mondscheibe das Licht der Sterne stark überstrahlt. Von Zeit zu Zeit kommen allerdings auch Bedeckungen sehr heller Sterne vor (Aldebaran, Regulus, Spika, Antares u. a.), die auch in einem Feldstecher wahrnehmbar sind. Die gelegentlich vorkommenden Bedeckungen von helleren Sternhaufen (Plejaden, Hyaden, Praesepe) sind besonders wertvoll, da eine größere Zahl von Beobachtungen in kurzer Zeit möglich sind. Dasselbe ist während totaler Mondfinsternisse der Fall, wo auch die Beobachtung der Bedeckung schwächerer Sterne gelingt.

---

[1]) Eine Ausnahme bildet der vierte Jupitermond, der zu gewissen Zeiten nicht verfinstert wird, da seine gegen die Jupiterbahnebene geneigte Bahn ihn nördlich oder südlich des Planetenschattens vorbeiführt.

Alle diese Gelegenheiten zur Längenbestimmung haben den Nachteil, daß sie an bestimmte seltene Zeitpunkte gebunden sind. Sie finden daher auch nur gelegentlich Verwendung und sind keinesfalls als Werkzeug für den täglichen Gebrauch geeignet, wie es z. B. der Seemann bei der Navigation nötig hat. Glücklicherweise läßt das diesen Methoden zugrunde liegende Prinzip eine sehr weitgehende Verallgemeinerung zu, so daß seine Anwendungsmöglichkeiten fast unbeschränkt sind.

Der *Mond*, der in 27,3 Tagen seinen siderischen Umlauf um die Erde vollendet und sich durchschnittlich in etwas weniger als einer Stunde um seinen eigenen Durchmesser fortbewegt, bietet zu jedem Zeitpunkt, an dem er überhaupt sichtbar ist, die Möglichkeit einer absoluten Zeitbestimmung: sein geozentrischer Ort, der sich mit der Zeit so rasch ändert, ist ja in den astronomischen und nautischen Jahrbüchern als Funktion der Weltzeit ephemeridenmäßig verzeichnet und stellt daher gewissermaßen den Zeiger einer Weltzeituhr dar, dessen Stellung man direkt am Fixsternhimmel ablesen kann und nur noch — mit der Ortszeit und genäherten Werten für die geographischen Koordinaten — wegen der täglichen Parallaxe zu verbessern hat. Jede Bestimmung der sphärischen Koordinaten des Mondorts in irgend einem Bezugssystem oder auch nur *einer* Koordinate, sofern sie von der Mondbewegung stark genug beeinflußt wird, kann daher durch Vergleich mit der Mondephemeride zur Ermittlung der Weltzeit und damit der geographischen Länge dienen. Auch die Anfangs- und Endzeiten der Finsternisse und Bedeckungen sind ja nur deshalb geeignete Hilfsgrößen zur Bestimmung der Weltzeit, weil sie Funktionen des Mondorts sind.

Die strengste Methode dieser Art ist die aus der Bestimmung der Meridiandurchgangszeit des Mondes, die ja infolge der raschen Änderung der Rektaszension des Mondes von der Ortszeit der Kulmination und daher auch von der geographischen Länge abhängt. Für kleine Instrumente und für Beobachtungen mit dem bloßen Auge (Harzersches Fadendreieck!) eignet sich besser die Methode der Mondbeobachtung in einem beliebigen Vertikal, dessen Azimut aus Sterndurchgängen bekannt ist. Die klassische Methode der Längenbestimmung auf See ist die der *Monddistanzen*, die mit Hilfe des Sextanten ausführbar ist. Sie ist eigentlich nichts anders als eine Verallgemeinerung der Sternbedeckungsmethode: die absolute Zeit wird aus der scheinbaren Distanz eines Sterns vom Mondrand abgeleitet, die sich besonders schnell ändert, wenn der Stern in der Nähe der Mondbahn liegt; bei Sternbedeckungen wird lediglich der spezielle Zeitpunkt abgewartet, an dem die Distanz gleich null wird.

57. Telegraphische Bestimmung des Längenunterschiedes fester Stationen

Eine besonders große Sorgfalt ist bei der Bestimmung der geographischen Länge der *Sternwarten* notwendig, die ja als geographische Fixpunkte erster Ordnung gelten, und deren Aufgabe es u. a. ist, die *Zeit* zu überwachen und gegebenenfalls (durch Steuerung der funkentelegraphischen Zeitzeichen) zu verbreiten. Dazu ist natürlich (zwecks Reduktion der durch astronomische

Beobachtungen erhaltenen Ortszeit auf Weltzeit oder Zonenzeit) eine äußerst genaue Kenntnis der geographischen Länge erforderlich.

Seit der Erfindung des elektrischen Telegraphen benutzt man diese Einrichtung zur Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Beobachtungsorte (Sternwarten), die durch eine Telegraphenleitung miteinander verbunden sind. Diese Methode ist äußerst exakt, mit verhältnismäßig bescheidenen technischen Hilfsmitteln durchführbar und hat den großen Vorzug, daß die Beobachter in der Lage sind, alle nur denkbaren Fehlerquellen zu berücksichtigen oder auszuschalten. Einfacher ist die Längenvergleichung durch gleichzeitigen Empfang drahtloser Zeitsignale auf beiden Stationen — doch kann diese Methode mit der erstgenannten an Genauigkeit nur konkurrieren, wenn die Beobachter mit den recht komplizierten und kostspieligen Anlagen zum selbstregistrierenden Empfang der Zeitzeichen ausgerüstet sind.

Wir beschränken uns hier darauf, die Möglichkeiten zur Ausschaltung systematischer Fehler bei der telegraphischen Längenvergleichung zwischen zwei Orten A und B kurz zu behandeln. Es möge dabei angenommen werden, daß beide Beobachter mit den gleichen Apparaturen (tragbaren Passageinstrumenten und Schreibchronographen) ausgerüstet sind, und daß beide Orte durch eine Leitung miteinander verbunden sind. Jeder der beiden Chronographen registriert nebeneinander drei Arten von Signalen: die Sekundenzeichen der beiden in A und B stationierten Uhren, sowie die Signale des Beobachters am angeschlossenen Passageinstrument.

Auf jeder Station wird der Uhrstand aus Beobachtungen von Meridiandurchgängen abgeleitet (siehe Abschnitt 29). Diese Uhrstände sind mit systematischen Fehlern[1]) behaftet, die sich folgendermaßen zusammensetzen: 1. aus der *persönlichen Gleichung* des Beobachters. Darunter versteht man die Verzögerung, mit der der Beobachter auf die zu beobachtenden Vorgänge, z. B. die Fadendurchgänge der Zeitsterne, reagiert. Die persönliche Gleichung läßt sich bis auf einen geringen Rest beseitigen, wenn das Passageinstrument mit einem „unpersönlichen Mikrometer" ausgerüstet ist; 2. Aus der Summe der systematischen Fehler, die dem Instrumentarium eigentümlich sind; 3. Aus den Fehlern der Rektaszensionen der bei der Zeitbestimmung benutzten Sterne. Da nun zur Längenvergleichung nur die *Differenz* der beiden Ortszeiten benutzt wird, so sind diese Fehler unwirksam, wenn sie auf beiden Stationen gleich groß sind. Für die Rektaszensionsfehler läßt sich das dadurch erreichen, daß beide Beobachter die gleichen Sterne benutzen. Die übrigen Fehler lassen sich eliminieren, indem man die Beobachtungen nach Austausch der Beobachter und Instrumente wiederholt. Bezeichnet man nämlich mit ε_1, ε_2 die systematischen Zeitbestimmungsfehler, die den beiden Beobachtern mitsamt ihrem Instrumentarium anhaften, so ist der durch sie verursachte Fehler der Längenvergleichung $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, nach dem Austausch dagegen $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Das Mittel beider Ergebnisse wird also von diesen Fehlern frei sein.

[1]) Siehe Anhang D I.

Während der Ausführung der Beobachtungsreihen müssen die Angaben der beiden Uhren mehrfach miteinander verglichen werden, damit nach Berücksichtigung aller Korrektionen die Differenz der Ortszeiten gebildet werden kann. Dazu dient der Chronograph, auf dem man beide Uhren (die ortsfremde über die Telegraphenleitung) gleichzeitig schreiben lassen kann. Hierbei ist aber zu beachten, daß die Sekundenzeichen der fremden Uhr mit einer der Länge der Leitung proportionalen Verspätung eintreffen, da ja der elektrische Strom den Draht mit endlicher Geschwindigkeit durchläuft. Bezeichnen wir die Längen der beiden Örter mit λ_a, λ_b, die wahren Sternzeiten im Augenblick der Vergleichung mit Θ_a, Θ_b, dann ist offenbar

$$\lambda_b - \lambda_a = \Theta_a - \Theta_b .$$

Da nun immer die ortsfremde Zeit um die Laufzeit $\Delta\Theta$ des Stromes vergrößert erscheint, so ist der Fehler der Längendifferenz gleich $-\Delta\Theta$, wenn man diese aus den Registrierungen in A ableitet, dagegen gleich $+\Delta\Theta$ nach den chronographischen Aufzeichnungen in B. Man erhält also die wahre Längendifferenz, indem man die Ergebnisse der Uhrvergleichung auf beiden Stationen mittelt.

Die Längenvergleichung zweier Sternwarten auf diesem Wege ergibt sehr genaue Werte, wenn sie sich auf Beobachtungsreihen stützt, die längere Zeit hindurch fortgesetzt werden, und in deren Verlauf Beobachter und Instrumente mehrfach ihren Standort wechseln. Es liegt in der Natur der Sache, daß die Schwierigkeiten solcher Unternehmungen mit der Entfernung der beiden Stationen stark anwachsen. In der Praxis werden daher meist kleinere Längendifferenzen gemessen, und der Anschluß weit entfernter Stationen aneinander und an das System der geographischen Längen wird über eine kleinere oder größere Anzahl Zwischenstationen erfolgen. Eine Summierung der Beobachtungsfehler ist dabei unvermeidlich.

Die für Astronomie und Geodäsie gleich wichtige Aufgabe, die Sternwarten und andere geographische Punkte aller Erdteile an das Längensystem des Greenwicher Meridians anzuschließen, ist noch keineswegs mit der höchsten erreichbaren Präzision gelöst worden. Eine großzügige internationale Zusammenarbeit, wie sie in kleineren Gebieten wie z. B. Mitteleuropa schon länger bestanden hat, wäre hierzu erforderlich. Es ist zu erwarten, daß bei diesen Arbeiten die Methode der funkentelegraphischen Zeitvergleichung immer mehr an Bedeutung gewinnen wird, obwohl auch sie ihre besonderen Schwierigkeiten und Fehlerquellen hat.

58. Längenbestimmung aus Meridiandurchgängen des Mondes

Beobachtet man die Durchgangszeit des Mondes durch den Meridian mit einem Passageinstrument und im Anschluß an eine Folge von Zeitsternen, die vor- und nachher kulminieren, so erhält man die Rektaszension des Mondes zu eben dieser Zeit. Mit ihrer Hilfe läßt sich die Weltzeit des Durchgangs unmittelbar der Mondephemeride entnehmen, die im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 0^h WZ jeden Tag und in den meisten Nautischen Jahrbüchern (Nautical Almanac!) sogar für jede Stunde WZ gegeben ist.

Diese Methode der absoluten Längenbestimmung bedürfte keiner näheren Erläuterung, wenn es möglich wäre, die Durchgangszeit des Mondmittelpunkts, auf den sich die Ephemeriden beziehen, direkt zu beobachten, etwa als das arithmetische Mittel der Durchgangszeiten beider Ränder der Mondscheibe. Das ist aber nur zur Zeit des Vollmonds möglich, allenfalls noch einige Tage vor und nach Neumond, wenn der dunkle Teil des Mondes durch das „aschgraue Licht" schwach erhellt ist. Im allgemeinen wird man nur einen Rand beobachten — den westlichen bei zunehmender, den östlichen bei abnehmender Phase — und das Ergebnis mittels des scheinbaren Halbmessers der Mondscheibe auf deren Mittelpunkt reduzieren. Randbeobachtungen werden allerdings stets durch Fehler entstellt, die teils von der Überstrahlung durch die Helligkeit der Mondscheibe, teils von der Unregelmäßigkeit des Randprofils (Gebirge) herrühren. Um diese Fehlerquellen zu vermeiden, ziehen manche Beobachter es vor, den Meßfaden auf den kleinen Krater *Mösting A* einzustellen, ein bei jeder Beleuchtungsphase scharf definiertes Objekt in der Mitte der Mondscheibe, um die es (infolge der Librationsschwankungen des Mondkörpers) im Bereich weniger Bogenminuten hin und her pendelt. Die Beobachtung von Mösting A ist natürlich nur in der Zeit zwischen dem ersten und letzten Viertel möglich, da nur dann die Mondmitte im Sonnenlicht steht. Die geozentrisch gesehenen Abweichungen des Kraterorts vom Mondmittelpunkt in Rektaszension und Deklination findet man im Berliner Jahrbuch verzeichnet, ebenso seine Äquatoreal-Horizontalparallaxe, die immer etwas größer als die des Mondmittelpunkts selber ist. Mit diesen Daten lassen sich alle Beobachtungen dieses Objekts ohne Schwierigkeiten reduzieren.

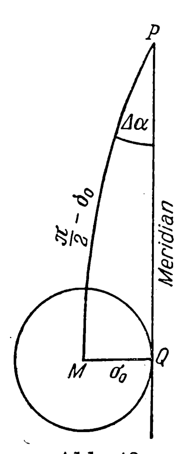


Abb. 48: Meridiandurchgang des Mondrandes

Die Reduktion von Meridianbeobachtungen des *Mondrandes* auf den Mittelpunkt ist im Prinzip auf zwei Arten ausführbar:

1. Man bestimmt den kleinen Stundenwinkel $\Delta\alpha$ des Mondmittelpunkts M (Abb. 48) in dem Augenblick, wo der Mondrand den Meridian in Q berührt. Da für den Meridian die Azimutparallaxe verschwindet [siehe Formel (I; 30)], so wird im gleichen Augenblick auch für einen im Erdmittelpunkt gedachten Beobachter Meridianberührung stattfinden. Abb. 48 gilt also auch für die geozentrische Sphäre, und es ist im rechtwinkligen Dreieck MPQ

$$\sin\Delta\alpha = \sin\sigma_0 \sec\delta_0 ,$$

wobei σ_0 und δ_0 die geozentrischen Werte des scheinbaren Halbmessers und der Deklination bedeuten, wie sie in den Jahrbüchern verzeichnet sind. Da $\Delta\alpha$ und σ_0 klein sind, darf man den Bogen statt des Sinus setzen. Wird $\Delta\alpha$ in Zeitsekunden, σ_0 in Bogensekunden ausgedrückt, so erhält man

$$\Delta\alpha = \frac{1}{15}\sigma_0 \sec\delta_0 .$$

Ist nun $\Theta = \alpha$ die beobachtete Meridiandurchgangszeit des westlichen bzw. östlichen Mondrandes, so ist

$$\alpha_0(\Theta) = \alpha \pm \varDelta\alpha = \Theta \pm \frac{1}{15}\sigma_0 \sec\delta_0$$

die geozentrische Rektaszension des Mondmittelpunkts zur Ortssternzeit Θ.

2. Zwischen dem Meridiandurchgang des Mondmittelpunkts und eines der Ränder vergeht eine gewisse Sternzeit $\pm \varDelta\Theta$. Es ist also $\Theta_0 = \Theta \pm \varDelta\Theta$ Kulminationszeit und Rektaszension des Mondmittelpunkts. Würde der Mond seinen Ort an der Fixsternsphäre nicht ändern, so wäre (Abb. 48) einfach $\varDelta\Theta = \varDelta\alpha$. In Wirklichkeit wächst in der Zeit $\varDelta\Theta$ die Rektaszension des Mondes um eine Größe $k\varDelta\Theta$. Es ist demnach $\varDelta\Theta = \varDelta\alpha + k\varDelta\Theta$, also

$$\alpha_0(\Theta_0) = \Theta \pm \frac{\varDelta\alpha}{1-k} \qquad \text{(VI; 1)}$$

die geozentrische Rektaszension des Mondmittelpunkts bei der Kulmination, also zur Ortssternzeit $\Theta_0 = \alpha_0$.

Die Größe k bedeutet hier die in Zeitsekunden ausgedrückte Änderung von α in einer *Sternzeit*sekunde. Die Nautischen Jahrbücher (Nautical Almanac!) geben diese Änderung gewöhnlich für 1^h mittlere Zeit. Ist h der für den Beobachtungszeitpunkt interpolierte Wert dieser Änderung, so ist

$$k = \frac{h}{3600} \cdot \frac{365 \cdot 2422}{366 \cdot 2422} = 0{,}000277\,\mathrm{h}.$$

In beiden Fällen erhält man aus der Mondephemeride die *Weltzeit* T_0 als das Argument der Rektaszension α_0. Sie entspricht der Ortssternzeit Θ (bzw. Θ_0). Verwandelt man sie in Greenwicher Sternzeit ($\overline{\Theta}_0$), so ist die gesuchte geographische Länge

$$\lambda = \overline{\Theta}_0 - \Theta \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \overline{\Theta}_0 - \Theta_0 .$$

Bislang wurde angenommen, daß die Durchgangszeit des westlichen oder östlichen Mondrandes durch den Meridian durch Beobachtung genau bekannt sei. In Wirklichkeit wird der Durchgang durch eine bestimmte Vertikale des Gesichtsfeldes (z. B. durch den mittleren Vertikalfaden) registriert, und die erhaltene Zeit ist (s. Abschnitt 29) noch wegen des Einflusses der Instrumentalfehler zu verbessern. Dies kann aber nicht ohne Berücksichtigung der Parallaxe des Mondes erfolgen. Derartige Überlegungen sind bei der Reduktion aller Mondbeobachtungen notwendig, die mit fehlerhaften oder fehlerhaft aufgestellten Instrumenten vorgenommen werden. Als wichtigstes Beispiel hierfür möge die Meridianbeobachtung des Mondes mit dem Passageinstrument dienen.

Wir erinnern an die Gleichung (III; 42), die der Besselschen Reduktionsformel zugrunde liegt:

$$-\sin c = \sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \sin(m + t). \qquad \text{(VI; 2)}$$

Hier bedeutet $t = \Theta - \alpha$ den kleinen Stundenwinkel des zur Sternzeit Θ beobachteten Objekts (α, δ), während c, m, n die Instrumentalkonstanten sind, die — ebenso wie die in Θ enthaltene Uhrkorrektion Δu — aus Fixsternbeobachtungen bekannt sein sollen. Die Kollimation c möge hier die östliche Abweichung des Mittelfadens von dem auf der Instrumentenachse senkrechten Größtkreise bedeuten, der sich bei richtiger Stellung des Instruments mit dem Meridian deckt. Dann ist $c + f$ die entsprechende Abweichung eines Seitenfadens F, dessen östlicher Abstand vom Mittelfaden f (in Zeitsekunden) betragen möge. Ebenso ist $c + f \pm \frac{1}{15}\sigma$ die östliche Abweichung des Mondmittelpunkts von diesem Größtkreis, falls der westliche bzw. östliche Mondrand an dem Faden F beobachtet wird, und σ den in Bogensekunden ausgedrückten Halbmesser des Mondes darstellt, wie er dem Beobachter erscheint. Setzen wir demnach $c + f \pm \frac{1}{15}\sigma$ statt c und berücksichtigen, daß $c, m, n, \sigma, f, \Theta - \alpha$ klein sind, so erhalten wir an Stelle von (VI; 2)

$$-(\Theta - \alpha)\cos\delta = c + f \pm \frac{1}{15}\sigma + m\cos\delta + n\sin\delta. \quad \text{(VI; 3)}$$

Abb. 49: Berücksichtigung der Parallaxe bei Meridiandurchgängen des Mondes

Hier bedeuten α, δ, σ die (vom Beobachter aus gesehenen) *scheinbaren* Werte der Mondkoordinaten und des Mondhalbmessers, die durch Berücksichtigung der Parallaxe noch in die *geozentrischen* Größen α_0, δ_0, σ_0 zu verwandeln sind.

Ist in Abb. 49 Z' das geozentrische Zenit, L der scheinbare und L_0 die geozentrische Mondort, so gelten in den Dreiecken PLZ' und PL_0Z' der Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \cos\delta\sin t &= \sin z'\sin A', \\ \cos\delta\cos t &= \cos z'\cos\varphi' + \sin z'\sin\varphi'\cos A', \\ \sin\delta &= \cos z'\sin\varphi' - \sin z'\cos\varphi'\cos A', \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \cos\delta_0\sin t_0 &= \sin z_0'\sin A', \\ \cos\delta_0\cos t_0 &= \cos z_0'\cos\varphi' + \sin z_0'\sin\varphi'\cos A', \\ \sin\delta_0 &= \cos z_0'\sin\varphi' - \sin z_0'\cos\varphi'\cos A'. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus je zwei entsprechenden Gleichungen dieser Systeme die Größen $\sin A'$, $\sin\varphi'\cos A'$, $\cos\varphi'\cos A'$, so erhält man

$$\begin{aligned} \cos\delta\sin t\,\sin z_0' - \cos\delta_0\sin t_0\sin z' &= 0, \\ \cos\delta\cos t\,\sin z_0' - \cos\delta_0\cos t_0\sin z' &= \cos\varphi'\sin(z_0' - z'), \\ \sin\delta\sin z_0' - \sin\delta_0\sin z' &= \sin\varphi'\sin(z_0' - z'). \end{aligned}$$

Dividiert man durch sin z', berücksichtigt, daß [siehe (I; 26) und Abb. 13]

$$\frac{\sin z_0'}{\sin z'} = \frac{r}{r_0}, \qquad \frac{\sin(z' - z_0')}{\sin z'} = \frac{\varrho}{r_0} = \varrho \sin \pi_☾,$$

und ersetzt für die kleinen Winkel $t = \Theta - \alpha$, $t_0 = \Theta - \alpha_0$ den Sinus durch den Bogen und den Cosinus durch eins, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{r_0}(\Theta - \alpha)\cos\delta &= (\Theta - \alpha_0)\cos\delta_0, \\ \frac{r}{r_0}\cos\delta &= \cos\delta_0 - \varrho\sin\pi_☾\cos\varphi', \\ \frac{r}{r_0}\sin\delta &= \sin\delta_0 - \varrho\sin\pi_☾\sin\varphi' \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI; 4)}$$

und aus den letzten beiden dieser Gleichungen

$$\frac{r}{r_0}\cos(\delta - \delta_0) \approx \frac{r}{r_0} = 1 - \varrho\sin\pi_☾\cos(\varphi' - \delta_0). \qquad \text{(VI; 5)}$$

Multipliziert man nun (VI; 3) mit $\frac{r}{r_0}$ und benutzt die Beziehungen (VI; 4) und (VI; 5), so folgt

$$-(\Theta - \alpha_0)\cos\delta_0 = (c + f)\,[1 - \varrho\sin\pi_☾\cos(\varphi' - \delta_0)] \pm \frac{1}{15}\sigma\frac{r}{r_0} +$$
$$+ m(\cos\delta_0 - \varrho\sin\pi_☾\cos\varphi') + n(\sin\delta_0 - \varrho\sin\pi_☾\sin\varphi')$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \Theta + \Delta\alpha = \\ &= \Theta + f\sec\delta_0\,[1 - \varrho\sin\pi_☾\cos(\varphi' - \delta_0)] \pm \frac{1}{15}\sigma_0\sec\delta_0 + \\ &\quad + m_0 + n_0\operatorname{tg}\delta_0 + c_0\sec\delta_0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI; 6)}$$

wobei wegen (I; 42) $\sigma \cdot \frac{r}{r_0} = \sigma_0$ gesetzt werden konnte und

$$m_0 = m - c\varrho\sin\pi_☾\cos\varphi', \quad n_0 = n - c\varrho\sin\pi_☾\sin\varphi',$$
$$c_0 = c - \varrho\sin\pi_☾(m\cos\varphi' + n\sin\varphi')$$

die wegen Parallaxe korrigierten Instrumentalkonstanten bedeuten. Formel (VI; 6) liefert also die Rektaszension des geozentrischen Mondmittelpunkts für den Augenblick Θ, in dem der Durchgang des (westlichen oder östlichen) Mondrandes durch den Faden F beobachtet wird. Die Kulminationszeit des Mondmittelpunkts ergibt sich wiederum, mit dem $\Delta\alpha$ der Formel (VI; 6), aus (VI; 1).

Die Genauigkeit einer *absoluten* Längenbestimmung mit Hilfe von Mondbeobachtungen dieser oder anderer Art ist beschränkt. Die Berechnung der Bewegung unseres Trabanten ist eine der schwierigsten Aufgaben der Himmelsmechanik, und die Ephemeriden des Mondes enthalten daher kleine Restfehler, die auch die genaueste Theorie nicht beseitigen kann, und deren Ermittlung nur nachträglich auf empirischem Wege, d. h. durch fortlaufende Meridianbeobachtungen des Mondes auf großen Sternwarten möglich ist. Wenn auch diese Ephemeridenfehler die Größenordnung einer Zeitsekunde selten überschreiten, so ist ihr Einfluß auf die absolute Bestimmung der geographischen Länge doch bedeutend. Da nämlich die Zunahme der Mondrektaszension durchschnittlich 27 mal langsamer erfolgt als die Zunahme der Sternzeit selbst, so geht ein Ephemeridenfehler ε durchschnittlich mit dem 27fachen Betrage in das Ergebnis der Längenbestimmung ein. Genauer ist, wie eine einfache Dreisatzüberlegung zeigt,

$$d\lambda = \frac{3600}{h}\varepsilon$$

der Fehler der Längenbestimmung, wenn h, wie weiter oben, den Zuwachs von α in einer Stunde bedeutet.

Wenn man *Längendifferenzen* aus Mondbeobachtungen ableitet, entfällt der Einfluß des Ephemeridenfehlers. Diese Methode der *relativen* Längenbestimmung entspricht vollkommen der telegraphischen Methode, nur daß hier die telegraphische Uhrvergleichung durch die zwischen den Sterndurchgängen eingeschaltete Beobachtung des Mondes ersetzt wird. Auf jeder Station wird nämlich die Arbeitsuhr, deren Stand die Sternbeobachtungen ergeben, mit der durch die Mondbewegung definierten Weltzeit verglichen, und da es ja nur auf die Differenz der Zeiten ankommt, fällt der Ephemeridenfehler heraus. der einem (längere Zeit konstant bleibenden) Fehler der Zeitangabe dieser symbolischen Weltzeituhr gleichkommt. Das gleiche gilt mehr oder weniger auch für andere bei Mondbeobachtungen auftretende systematische Fehler, wie z. B. die Beeinflussung der Randbeobachtungen durch Überstrahlung oder Profilunregelmäßigkeiten, sofern nur die Beobachtungen auf beiden Stationen in der gleichen Weise erfolgen.

59. Längenbestimmung aus Azimut oder Zenitdistanz des Mondes

Allgemein läßt sich das Problem der Längenbestimmung lösen, wenn man eine beliebige Größe beobachtet, die vom Mondort abhängt, und in deren zeitliche Änderung die Bahnbewegung des Mondes möglichst unvermindert eingeht. Für das *Azimut* des Mondes ist diese Bedingung am besten in der Nähe des Meridians erfüllt, aber auch in einem ziemlich breiten Bereich vor und nach der Kulmination noch in genügendem Maße. Je höher die geographische Breite, um so ausgedehnter ist dieser Bereich, in dem die Bahngeschwindigkeit eine starke horizontale Komponente hat. Ungünstiger liegen die Dinge bei der *Zenitdistanz*. Nur in kleinen Breiten und in der Umgebung des Ersten Vertikals ist die vertikale Bahnbewegungskomponente so beträchtlich, daß Zenitdistanzmessungen für die Bestimmung der geographischen Länge geeignet sind.

Bei der Beschreibung der anzuwendenden Methode und der Untersuchung der Fehlereinflüsse folgen wir im allgemeinen den von P. HARZER[1]) vorgezeichneten Wegen. In Abb. 50 sei an der geozentrischen Sphäre XQ der Himmelsäquator (X = Frühlingspunkt), PZ der Meridian des Beobachtungsorts und KM die *instantane Mondbahn*, d. h. der Größtkreis, auf dem sich zur Zeit der Beobachtung der geozentrische Mondort M in bezug auf das zweite (durch P und X definierte) Äquatorsystem fortbewegt. Man kann die Bestimmungsstücke der instantanen Mondbahn, nämlich die Rektaszension des Knotens $XK = \Omega$ und die Neigung i, für ein geraumes Zeitintervall, das mindestens 5 Stunden vor und nach der Beobachtung umfaßt, als konstant ansehen. Innerhalb dieses Zeitraums darf man auch die zeitliche Änderung der *Mondlänge* als unveränderlich betrachten — unter „Mondlänge" versteht man den gebrochenen Bogen $XKM = \Omega + v$. Die Größen i, Ω lassen sich dann leicht aus zwei geozentrischen Mondörtern M_1, M_2 ableiten, die zu zwei in dem genannten Zeitintervall liegenden vollen Weltzeitstunden gehören, und deren Koordinaten ($\alpha_1, \delta_1; \alpha_2, \delta_2$) man der Ephemeride des Jahrbuchs entnimmt. Im rechtwinkligen Dreieck KMN ist nämlich

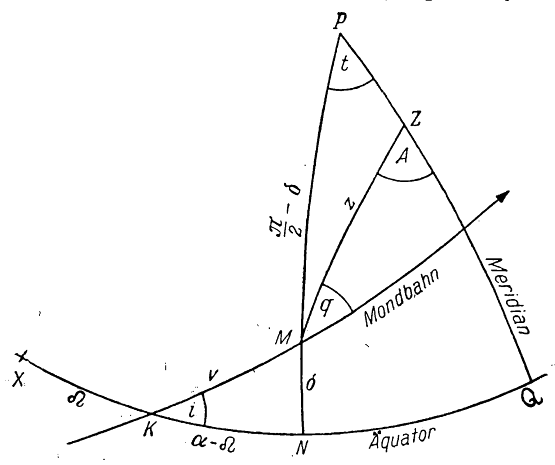


Abb. 50: Längenbestimmung aus Mondörtern

$$\operatorname{tg} i \sin(\alpha - \Omega) = \operatorname{tg} \delta. \qquad \text{(VI; 7)}$$

Wendet man diese Formel auf beide Örter an, so erhält man aus zwei linearen Gleichungen die zur Bestimmung von i und Ω geeigneten Größen

$$\operatorname{tg} i \cos \Omega = \frac{\operatorname{tg} \delta_2 \cos \alpha_1 - \operatorname{tg} \delta_1 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\operatorname{tg} i \sin \Omega = \frac{\operatorname{tg} \delta_2 \sin \alpha_1 - \operatorname{tg} \delta_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Eine andere Lösung derselben Aufgabe ergibt sich, wenn man dem Jahrbuch für *eine* dem Beobachtungszeitpunkt möglichst nahe Weltzeitstunde die Koordinaten des Mondes und das Verhältnis ihrer zeitlichen Änderungen

[1]) P. HARZER: Über die Bestimmung der Länge aus einem Azimut oder einer Zenitdistanz des Mondes. Astron. Nachr. 214, 123.

entnimmt. Sind $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ die im Nautical Almanac gegebenen Koordinatenänderungen für eine Stunde, so ist stets genau genug

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = \frac{1}{15}\,\frac{\Delta\delta}{\Delta\alpha}.$$

Differenziert man nun (VI; 7) nach α und δ, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} i \cos(\alpha - \Omega)\, d\alpha = \sec^2\delta\, d\delta, \qquad \text{(VI; 8)}$$

und man erhält aus (VI; 7) und (VI; 8) die beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} i \cos\Omega \sin\alpha - \operatorname{tg} i \sin\Omega \cos\alpha = \operatorname{tg}\delta,$$

$$\operatorname{tg} i \cos\Omega \cos\alpha + \operatorname{tg} i \sin\Omega \sin\alpha = \frac{d\delta}{d\alpha}\sec^2\delta,$$

aus denen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} i \cos\Omega &= \operatorname{tg}\delta \sin\alpha + \frac{d\delta}{d\alpha}\sec^2\delta\cos\alpha, \\ \operatorname{tg} i \sin\Omega &= -\operatorname{tg}\delta \cos\alpha + \frac{d\delta}{d\alpha}\sec^2\delta\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI; 9)}$$

folgt.

Die Aufgabe der Längenbestimmung ist gelöst, wenn man aus dem wegen Parallaxe, Halbmesser und Refraktion verbesserten Beobachtungswert A oder z den zugehörigen geozentrischen Stundenwinkel $t = \Theta - \alpha$ des Mondes berechnet hat, denn dieser liefert bei bekannter Ortszeit Θ die Rektaszension α, aus der auf Grund der Ephemeride die Weltzeit folgt. Führt man als beobachtbare Größen

$$f = \operatorname{tg} A, \quad g = \operatorname{tg} z$$

ein, von denen jeweils eine bekannt ist, und als Unbekannte

$$x = \operatorname{tg} t,$$

so findet man auf folgende Weise Gleichungen, aus denen sich x als Funktion von f oder g allein berechnen läßt:

Dividiert man die Grundgleichungen (II; 23) des Nautischen Dreiecks durch $\cos z \cos A$, so erhält man

$$\sec A = \frac{\sin\delta\sin\varphi}{\cos z\cos A} + \frac{\cos\delta\cos\varphi\cos t}{\cos z\cos A},$$

$$\operatorname{tg} z = -\frac{\sin\delta\cos\varphi}{\cos z\cos A} + \frac{\cos\delta\sin\varphi\cos t}{\cos z\cos A},$$

$$\operatorname{tg} z \operatorname{tg} A = \frac{\cos\delta\sin t}{\cos z\cos A}$$

oder, wenn man neben f, g, x noch die Hilfsgröße

$$h = \frac{\cos\delta\cos\varphi\cos t}{\cos z\cos A}$$

einführt,

$$\sqrt{1+f^2} = h\,(\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta\sec t + 1), \qquad \text{(VI; 10)}$$

$$g = h\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta\sec t), \qquad \text{(VI; 11)}$$

$$fg = h\,x\sec\varphi. \qquad \text{(VI; 12)}$$

Diese Gleichungen enthalten rechts außer h und x noch den unbekannten Stundenwinkel t in dem Ausdruck $\operatorname{tg}\delta\sec t$, der sich aber, wie gezeigt werden soll, als lineare Funktion von x darstellen läßt.

Da nämlich die Bahnkonstanten i, ☊ sowie die Sternzeit Θ bekannt sind, kann man auch

$$m = \operatorname{tg} i\cos(\Theta - ☊), \quad n = \operatorname{tg} i\sin(\Theta - ☊)$$

als gegebene Größen ansehen. Multipliziert man die Gleichungen (VI; 9) mit $\cos\Theta$, $\sin\Theta$ bzw. $\sin\Theta$, $-\cos\Theta$ und addiert, so erhält man

$$m = -\operatorname{tg}\delta\sin t + \frac{d\delta}{d\alpha}\sec^2\delta\cos t,$$

$$n = \operatorname{tg}\delta\cos t + \frac{d\delta}{d\alpha}\sec^2\delta\sin t$$

und hieraus

$$n - m\,x = n - m\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}\delta\sec t,$$

so daß man statt (VI; 10) und (VI; 11) auch

$$\sqrt{1+f^2} = h\,[\operatorname{tg}\varphi\,(n - m\,x) + 1], \qquad \text{(VI; 13)}$$

$$g = h\,(\operatorname{tg}\varphi - n + m\,x) \qquad \text{(VI; 14)}$$

schreiben kann. Die beiden Aufgaben, t aus A oder z zu bestimmen, lassen sich dann folgendermaßen erledigen:

a) *Azimutaufgabe*: Man eliminiert g und h, indem man (VI; 12) durch (VI; 14) dividiert. Das ergibt

$$f = \frac{x\sec\varphi}{\operatorname{tg}\varphi - n + mx} \quad \text{oder} \quad x = f\cos\varphi\,\frac{\operatorname{tg}\varphi - n}{1 - mf\cos\varphi},$$

also x als Funktion der aus Beobachtungen bekannten Größe $f = \operatorname{tg} A$.

b) *Zenitdistanzaufgabe*: Durch Addition der Quadrate von (VI; 12) und (VI; 14) erhält man

$$g^2\,(1 + f^2) = h^2\,[x^2\sec^2\varphi + (\operatorname{tg}\varphi - n + m\,x)^2],$$

während das Quadrat von (VI; 13)

$$1 + f^2 = h^2\,[\operatorname{tg}\varphi\,(n - m\,x) + 1]^2$$

liefert. Dividiert man die erste dieser beiden Gleichungen durch die zweite, so fallen f und h heraus, und man erhält nach kurzer Rechnung für x die quadratische Gleichung

$$a x^2 + 2 b x = c$$

mit den nur von $g = \operatorname{tg} z$ abhängigen Koeffizienten

$$a = \sec^2 \varphi + m^2 (1 - g^2 \operatorname{tg}^2 \varphi),$$
$$b = m [\operatorname{tg} \varphi (1 + g^2) - n (1 - g^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)],$$
$$c = g^2 (1 + n \operatorname{tg} \varphi)^2 - (\operatorname{tg} \varphi - n)^2.$$

Damit sind beide Aufgaben im Prinzip gelöst. Die Messung der Azimute und Zenitdistanzen geschieht in der Praxis durch Anschluß an passende Sterne. Man wird z. B. eine Längenbestimmung aus Azimutmessungen so vornehmen, daß man den Durchgang des Mondrandes und möglichst kurz vor- und nachher Durchgänge von Fixsternen durch den gleichen Vertikal beobachtet. Aus den Koordinaten der Sterne und der als bekannt vorausgesetzten Ortszeit und Polhöhe folgt nach (III; 17) das Azimut dieses Vertikals und damit das des Mondrandes.

Das beobachtete *Azimut* A des Mondrandes ist wegen Parallaxe und Halbmesser zu verbessern. Nach (I; 38) erhält man zunächst das geozentrische Azimut des Randes

$$A_0 = A - \varrho \sin \pi_{☾} \sin (\varphi - \varphi') \operatorname{cosec} z_0 \sin A_0,$$

sodann das geozentrische Azimut des Mittelpunkts

$$A_m = A_0 \mp \sigma_0 \operatorname{cosec} z_0 = A - \frac{\varrho \sin \pi_{☾} \sin (\varphi - \varphi') \sin A_0 \pm \sigma_0}{\sin z_0},$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn der westliche Rand beobachtet wurde. Auf der rechten Seite darf $A_0 = A$ gesetzt werden, während die geozentrische Zenitdistanz z_0 des Mondrandes, die gleich der des Mittelpunkts ist, aus den Grundformeln (II; 23) berechnet werden muß. Dazu ist allerdings die Kenntnis der Weltzeit bzw. der Mondkoordinaten nötig; man muß also ein Näherungsverfahren einschlagen, um zum Ziele zu gelangen. Beobachtet man die *Zenitdistanz* des (oberen oder unteren) Mondrandes, so ist diese nach Berücksichtigung der Refraktion zunächst [Formeln (I; 40), (I; 41)] wegen der Parallaxe zu korrigieren, worauf dann der geozentrische Halbmesser σ_0 hinzuzufügen bzw. abzuziehen ist.

Die Azimutmethode, die der Zenitdistanzmethode schon ihres größeren Anwendungsbereiches wegen vorzuziehen ist, läßt sich übrigens auch bequem mit dem Harzer*schen Fadendreieck* durchführen, dessen Azimut man mit Hilfe von Sterndurchgängen nach Formel (III; 17) ermittelt. Bei der verhältnismäßig geringen Genauigkeit dieses Verfahrens kann man auf die Berücksichtigung der Azimutparallaxe stets verzichten, zumal, wenn das Azimut klein ist. Ferner kann man, ohne die Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wesentlich zu überschreiten, auch Randbeobachtungen

vermeiden. Man hat für den Durchgang des Mondmittelpunkts durch die Fadenebene zwei Kriterien, die bei einiger Übung genügend Sicherheit gewährleisten: 1. die Hörnerspitzen der Mondsichel (vor dem ersten und nach dem letzten Viertel) sind von der Fadenebene gleich weit entfernt; 2. die Tangente im Schnittpunkt der Fadenebene mit dem (oberen oder unteren) Mondrand liegt waagerecht, d. h. schneidet den Faden rechtwinklig (siehe Abb. 51).

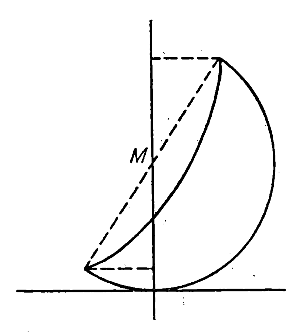


Abb. 51: Vertikaldurchgang des Mondmittelpunktes

Um den Einfluß der Beobachtungsfehler festzustellen, nehmen wir an, daß (Abb. 52) zur Zeit der Beobachtung der Vertikalfaden mit dem Vertikal ZM zusammenfällt, während das beobachtete Objekt (Mondmittelpunkt, Rand, Mösting A) in Wirklichkeit den Vertikal ZM' überschreitet, also den Abstand $df = \sin z\, dA$ vom Faden hat. Dieser fehlerhaften Einstellung entspricht ein Mondort M' in der instantanen Bahn, während dem Azimut des Fadens der Mondort M entsprechen würde. Die Entfernung MM' entspricht einem Fehler in der Bahnlänge

$$dv = c\, dT,$$

wenn c die instantane Bahngeschwindigkeit und dT die Zeit bedeutet, in der das Bahnstück MM' vom Monde durchlaufen wird. Das kleine rechtwinklige Dreieck QMM' darf als eben angesehen werden. Bedeutet (wie auch in Abb. 50) q den Winkel, den die Bahn mit dem Vertikal bildet, so ist

$$df = dv \sin q .$$

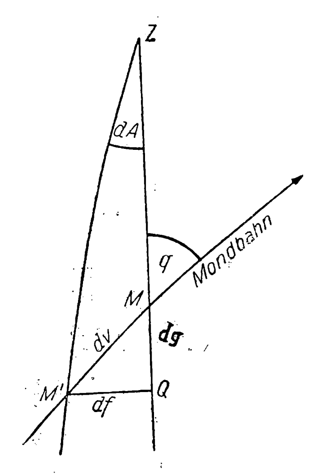


Abb. 52: Fehlereinflüsse bei Längenbestimmungen aus Mondörtern

Ebenso ist bei der Anwendung der Zenitdistanzmethode, wenn $dz = dg = MQ$ der Einstellungsfehler ist,

$$dg = dv \cos q .$$

Es ist nun die geographische Länge durch $\lambda = T - t$ gegeben, wenn T die Weltzeit, t die Ortszeit der Beobachtung bedeutet. Nehmen wir die Ortszeit als fehlerfrei an, so ist der Längenfehler $d\lambda = dT$. Es ist also, je nachdem es sich um die Azimut- oder Zenitdistanzmethode handelt,

$$d\lambda = \frac{df}{c \sin q} \quad \text{oder} \quad d\lambda = \frac{dg}{c \cos q} .$$

Der Faktor $1/c$ kann dabei Werte zwischen 23 und 31 annehmen. Die Längenbestimmung aus Azimuten ist am genauesten, wenn die instantane Bahn den Vertikal rechtwinklig schneidet, die aus Zenitdistanzen aber, wenn die Bahn im Augenblick der Beobachtung mit dem Vertikal zusammenfällt, also durch das Zenit geht. Es ist klar, daß dieser Fall nur in kleinen Breiten vorkommen kann.

60. Längenbestimmung aus Monddistanzen

Die klassische Methode der Längenbestimmung auf See, die vor Erfindung der Funkentelegraphie in der Nautik fast ausschließlich angewandt wurde, beruht auf der Messung der sphärischen Abstände des Mondes von hellen Fixsternen, Planeten oder auch der Sonne. Befinden sich diese Gestirne in der Nähe der Mondbahn (für Sonne und Planeten ist das immer der Fall), und sind die Abstände nicht zu klein, so geht die Bahnbewegung mit einer großen Komponente in die Abstände ein, so daß diese zur Ermittlung der Weltzeit sehr geeignet sind. Für den Seemann hat die Methode der Monddistanzen den unschätzbaren Vorteil, daß sie mit dem Sextanten ausführbar ist, also mit jenem Instrument, das für den Gebrauch auf dem schwankenden Schiff allein geeignet ist.

Das Prinzip des Sextanten (vgl. Abschn. 11) beruht ja darauf, daß vermittels eines drehbaren Spiegels die Bilder zweier Gestirne im Gesichtsfeld eines kleinen Fernrohrs zur Deckung gebracht werden können — an einem fein geteilten und mit Nonius versehenen Kreise liest man dann den Betrag der Drehung bzw. die daraus unmittelbar folgende Distanz der Gestirne ab. Bei der Beobachtung der Monddistanzen von Fixsternen bestimmt man den Abstand des Sternes vom beleuchteten Mondrand, bei Sonne und Planeten werden die Ränder dieser Gestirne mit dem des Mondes zur Deckung gebracht.

In manchen Nautischen Jahrbüchern findet man die geozentrischen Distanzen des Mondmittelpunktes von geeigneten Fixsternen bzw. von den Mittelpunkten der Sonne und der Planeten als Ephemeride gegeben. Hat man eine solche Ephemeride nicht zur Hand, so kann man sie leicht berechnen: Für eine kleine Anzahl von vollen Weltzeitstunden um den Beobachtungstermin herum entnimmt man dem Jahrbuch (Nautical Almanac) die Koordinaten α_1, δ_1; α_2, δ_2 der beiden Gestirne S_1 und S_2. Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß S_1 den Mond und S_2 einen Fixstern darstellt. Setzt man nun $\alpha_1 - \alpha_2 = \lambda$, so erhält man die geozentrische Distanz b nach den Formeln (V; 80) oder besser durch Anwendung der Tangentenformel Anhang A III (8) auf das Dreieck PS_1S_2.

Die Reduktion der Beobachtungen erfolgt in zwei Schritten: Zunächst ist der beobachtete Abstand um den scheinbaren Mondhalbmesser zu korrigieren. Der so erhaltene scheinbare Abstand des Sterns vom Mondmittelpunkt ist sodann von dem Einfluß der Parallaxe und der Refraktion zu befreien, um mit den geozentrischen Distanzen der Ephemeride vergleichbar zu werden. Zur Berechnung dieser Korrektionen sind aber die scheinbaren Mondörter nötig, die man wiederum nur berechnen kann, wenn man die geographische Länge des Beobachtungsorts wenigstens genähert kennt.

Der Seemann hat einen genäherten (gegißten) Wert der geographischen Länge seines Schiffsorts immer zur Verfügung. Ortszeit und Polhöhe seien aus besonderen Beobachtungen bekannt. Mit der genäherten Weltzeit, die man aus Ortszeit und genäherter Länge bestimmt, erhält man aus der Ephemeride die genäherten geozentrischen Koordinaten des Mondes (α_1, δ_1) und des Sterns (α_2, δ_2). Nach (II; 23) bestimmt man dann die entsprechenden geozentrischen Horizontalkoordinaten A_1, z_1; A_2, z_2 der beiden Gestirne. Um hieraus die scheinbaren (vom Beobachter aus gesehenen) Koordinaten A_1', z_1'; A_2', z_2' zu erhalten, sind an A_1, z_1 die Korrektionen wegen der täglichen Parallaxe, an z_1, z_2 die wegen der Refraktion anzubringen. Die ersteren erhält man nach (I; 38), (I; 40), (I; 41). Die Refraktion ist in den gebräuchlichen Tafeln immer mit dem Argument z', der *scheinbaren* Zenitdistanz gegeben. Zur Entnahme dieser Korrektion sind also zwei Schritte nötig: Mit dem schon um die Parallaxe verbesserten z entnimmt man die Refraktion r aus der Tafel, sodann wiederholt man die Entnahme mit dem Argument $z - r$. Wenn die Zenitdistanz nicht allzu groß ist, wird diese zweite Näherung schon den endgültigen Wert der Refraktion ergeben. Bequemer ist die Benutzung von Tafeln, die r direkt mit dem Argument wahre Zenitdistanz liefern.

Bei der Reduktion der gemessenen Distanz des Sternes vom Mondrand auf die vom Mondmittelpunkt muß man beachten, daß infolge der Refraktion der vertikale Monddurchmesser gegen den horizontalen verkürzt erscheint. Der Mondrand erscheint daher dem Beobachter nicht als Kreis, sondern als eine annähernd elliptische Figur, deren Achsenverhältnis man genügend genau einer Tafel mit dem Argument z' entnehmen kann. Bezeichnet man den Winkel, den die Verbindungslinie Stern-Mondmitte mit dem Vertikal des Mondes bildet, mit ω, und sind α und β die Halbachsen des scheinbaren Mondrandes, so findet man auf Grund der Ellipsengleichung den in Richtung auf den Stern zeigenden scheinbaren Mondhalbmesser zu

$$\sigma = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega}} = \alpha\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{1-\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\sin^2\omega}} = \frac{\alpha\cos\psi}{\sqrt{1-\sin^2\psi\sin^2\omega}}.$$

Hierbei ist α der nach (I; 43) wegen Parallaxe verbesserte Mondhalbmesser, während

$$\psi = \arcsin\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$$

aus der genannten Tafel (Anhang F IV) entnommen werden kann. Aus dem Dreieck ZS_1S_2 findet man ferner für $\sin\omega$ den geozentrischen Wert

$$|\sin\omega| = \frac{\sin z_2}{\sin b}\,|\sin(A_2 - A_1)|,$$

der eigentlich noch wegen Parallaxe zu verbessern wäre. Man kann aber auf diese kleine Korrektion verzichten, da $\sin^2\omega$ mit dem stets sehr kleinen

Faktor $\sin^2 \psi$ multipliziert erscheint. Die scheinbare Distanz b' des Sterns vom Mondmittelpunkt erhält man dann, indem man die gemessene Distanz um σ vermehrt oder vermindert, je nachdem ob man den dem Stern zu- oder abgewandten Rand des Mondes beobachtet hat.

Nunmehr ist von b' die Korrektion $b' - b$ zu subtrahieren, um den wahren Wert der geozentrischen Distanz b zu erhalten. Diese Korrektion läßt sich genau genug mit Hilfe der genäherten Mondkoordinaten berechnen, die man auf Grund der gegißten Länge schon zur Verfügung hat. Dabei ist zu beachten, daß $b' - b$ in ungünstigen Fällen bis zur Größenordnung $60'$ anwachsen kann — es kann für diesen Winkel wohl der Sinus mit dem Bogen vertauscht, nicht aber der Cosinus durch die Einheit ersetzt werden. Das gleiche gilt mehr oder weniger auch für die Verbesserungen der Zenitdistanzen der beiden Gestirne, während das Azimut des Fixsterns unverändert bleibt und das des Mondes nur eine kleine Änderung $d A_1$ wegen Parallaxe erfährt, die man stets als Differential ansehen kann. Es werde also zunächst b wegen der Parallaxe des Mondazimuts verbessert: Aus dem Dreieck $Z S_1 S_2$ folgt nach dem Cosinussatz

$$\cos b = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 \cos (A_2 - A_1)$$

und daher

$$\sin b \, d b = - \sin z_1 \sin z_2 \sin (A_2 - A_1) \, d A_1$$

oder, da nach (I; 38) $d A_1 = \varrho \sin \pi_{☾} \sin (\varphi - \varphi') \operatorname{cosec} z_1 \sin A_1$,

$$d b = - \frac{\varrho \sin \pi_{☾} \sin (\varphi - \varphi') \sin z_2 \sin A_1 \sin (A_2 - A_1)}{\sin b}.$$

Außerdem sind noch die Einflüsse zu berücksichtigen, die von den beträchtlicheren Verbesserungen der Zenitdistanzen wegen Parallaxe und Refraktion herrühren. Seien wieder die für die Sphäre des Beobachters gültigen Größen von den geozentrischen durch einen Strich unterschieden, und setzt man wie in Abschnitt 54

$$\varkappa = A_2 - A_1, \quad \mu = z_2 - z_1, \quad \nu = z_2 + z_1,$$
$$\mu' = z_2' - z_1', \quad \nu = z_2' + z_1',$$

so gelten die Gleichungen (V; 83)

$$\sin^2 \frac{b'}{2} = \sin^2 \frac{\mu'}{2} \cos^2 \frac{\varkappa}{2} + \sin^2 \frac{\nu'}{2} \sin^2 \frac{\varkappa}{2},$$

$$\sin^2 \frac{b}{2} = \sin^2 \frac{\mu}{2} \cos^2 \frac{\varkappa}{2} + \sin^2 \frac{\nu}{2} \sin^2 \frac{\varkappa}{2}.$$

Subtrahiert man diese voneinander und bedenkt, daß für irgend zwei Winkel α, β

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta),$$

so erhält man

$$\sin\frac{b'+b}{2}\sin\frac{b'-b}{2} = \cos^2\frac{\varkappa}{2}\sin\frac{\mu'+\mu}{2}\sin\frac{\mu'-\mu}{2} +$$
$$+\sin^2\frac{\varkappa}{2}\sin\frac{\nu'+\nu}{2}\sin\frac{\nu'-\nu}{2}$$

oder, wenn man

$$b'-b = \varDelta b,\quad \mu'-\mu = \varDelta z_2 - \varDelta z_1 = \varDelta\mu,$$
$$\nu'-\nu = \varDelta z_2 + \varDelta z_1 = \varDelta\nu$$

setzt und, was nach der obigen Bemerkung erlaubt ist, die Sinus der Verbesserungen $\varDelta b$, $\varDelta\mu$, $\varDelta\nu$ durch die Winkel ersetzt,

$$\varDelta b\sin\left(b+\frac{\varDelta b}{2}\right) = \varDelta\mu\cos^2\frac{\varkappa}{2}\sin\left(\mu+\frac{\varDelta\mu}{2}\right) + \varDelta\nu\sin^2\frac{\varkappa}{2}\sin\left(\nu+\frac{\varDelta\nu}{2}\right).$$

Diese Formel liefert zunächst einen Näherungswert für $\varDelta b$, wenn man den Faktor links durch $\sin b$ ersetzt. Berechnet man mit dieser Näherung den Faktor genauer, so folgt das endgültige $\varDelta b$ durch abermalige Auflösung der Gleichung. Damit ist die Aufgabe gelöst, denn mit $b = b' - db - \varDelta b$ erhält man den der beobachteten Monddistanz entsprechenden geozentrischen Wert, mit dem aus der gegebenen oder berechneten Ephemeride die zugehörige Weltzeit entnommen werden kann. Ist diese von der ursprünglich angenommenen, aus der gegißten Länge abgeleiteten Weltzeit nicht sehr verschieden, so kann die Rechnung als abgeschlossen gelten. Andernfalls muß man die ganze Rechnung mit der verbesserten Länge wiederholen.

61. Längenbestimmung aus Sternbedeckungen durch den Mond

Als Spezialfall der Methode der Monddistanzen läßt sich die Längenbestimmung aus *Sternbedeckungen* auffassen: An den Zeitpunkten des Verschwindens und des Wiedererscheinens eines Sterns hinter der Mondscheibe ist die scheinbare Distanz des Sterns vom Mondmittelpunkt gleich dem scheinbaren Mondhalbmesser und die Distanz vom Mondrand gleich null. Die Distanz ist also bekannt, und der Beobachtungsfehler kann daher ganz auf die beobachtete Zeit geworfen werden; diese läßt sich aber sehr genau festlegen, wenn der Stand der Arbeitsuhr nach Ortszeit bekannt ist. Besonders scharf läßt sich das Verschwinden eines Sterns hinter dem dunklen Mondrand (zwischen Neu- und Vollmond) beobachten, da man den Stern bis zu seinem plötzlichen Auslöschen im Auge behalten kann — die Registrierung des Zeitpunkts der Bedeckung erfolgt meist mit einer ganz geringfügigen Verzögerung, der *persönlichen Gleichung*, die selten mehr als 2—3 Zehntel einer Zeitsekunde beträgt und von einem erfahrenen Beobachter ziemlich richtig geschätzt und berücksichtigt werden kann. Mit etwas geringerer Sicherheit wird das Wiederaufleuchten eines Sterns am dunklen Mondrand (nach Voll-

mond) aufgefaßt, da es schwierig ist, die Stelle des Austritts genau zu fixieren. Noch ungenauer ist, namentlich bei schwächeren Sternen, die vom Mondlicht überstrahlt werden, die Beobachtung der Ein- und Austritte am hellen Rand.

Gegenüber der Methode der Monddistanzen hat die Beobachtung von Sternbedeckungen einen weiteren nicht zu unterschätzenden Vorteil, der darin besteht, daß die Bedeckungszeiten dem Einfluß der Refraktion nicht unterliegen. Man kann also bei der Entwicklung der Theorie der Sternbedeckungen die Krümmung der Lichtstrahlen durch die Erdatmosphäre ganz außer Betracht lassen.

Wir projizieren den Vorgang der Bedeckung auf eine Ebene, die durch den Erdmittelpunkt geht und das vom Fixstern kommende parallele Lichtbündel rechtwinklig schneidet. Auf dieser Ebene sei der Erdmittelpunkt selbst der Koordinatenanfang. Die Projektion der Erdachse machen wir zur X-Achse (positiv nach Norden), während die positive Y-Achse rechtwinklig dazu nach Osten gerichtet sei. Die Projektion des Beobachtungsorts bewegt sich dann im Laufe eines Sterntages auf einer Ellipse, deren kleine Achse in die X-Achse des Koordinatensystems fällt. Die Projektion des Mondes wird von einem Kreis begrenzt, dessen Halbmesser in Einheiten des äquatorealen Erdhalbmessers $k = 0{,}272495$ beträgt, und dessen Mittelpunkt eine bestimmte, durch die Theorie der Mondbewegung vorgeschriebene Bahn beschreibt. In den beiden Augenblicken des Beginns und des Endes der Bedeckung berührt der Lichtstrahl, der vom Stern zum Beobachter führt, den Mond. Er gehört also dem einhüllenden Zylinder an, der den Mondrand auf die XY-Ebene projiziert. Im Augenblick der Beobachtung fallen daher die Projektionen des Mondrandes und des Beobachtungsortes zusammen.

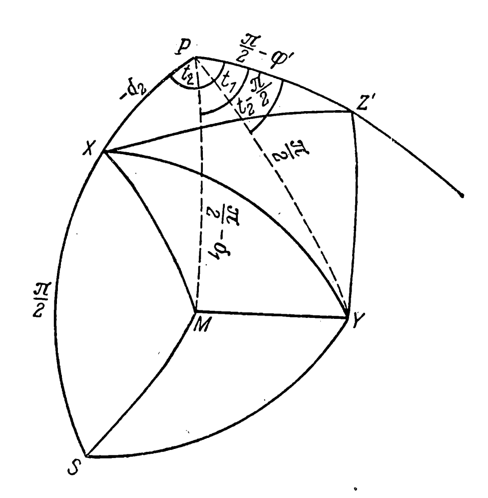


Abb. 53: Längenbestimmung aus Sternbedeckungen

An der geozentrischen Sphäre (Abb. 53) seien Z' das geozentrische Zenit, S der Ort des Fixsterns und M der Ort des Mondmittelpunkts zu der auf den Meridian des Beobachtungsorts bezogenen Sternzeit Θ. X und Y seien die Punkte, in denen die X- und Y-Achse die Sphäre durchstoßen. X liegt dann auf dem Stundenkreis von S (90° nördlich von S), und SXY ist ein Kugeloktant.

Bezeichnet man mit r die in Einheiten des äquatorealen Erdhalbmessers ausgedrückte geozentrische Entfernung des Mondmittelpunktes und mit ϱ,

wie üblich, die geozentrische Entfernung des Beobachtungsortes, der vom Erdmittelpunkt aus gesehen in Richtung Z' liegt, so sind offenbar

$$x = r \cos (MX), \quad y = r \cos (MY)$$

die rechtwinkligen Koordinaten der Projektion des Mondmittelpunkts und

$$\xi = \varrho \cos (Z'X), \quad \eta = \varrho \cos (Z'Y)$$

die Koordinaten der Projektion des Beobachtungsorts.

Da Y ein Pol des Größtkreises PXS ist, so ist

$$PY = \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle YPS = \frac{\pi}{2}.$$

Aus den Dreiecken PMX, PMY, $PZ'X$, $PZ'Y$ lassen sich dann nach dem Cosinussatz die Ausdrücke $\cos (MX)$ usw. berechnen, und man erhält, wenn man wie im vorigen Abschnitt die auf den Mond bezüglichen Größen mit dem Index 1, die auf den Stern bezüglichen mit dem Index 2 bezeichnet, und wenn man bedenkt, daß die Stundenwinkel von M, S, und Y

$$t_1 = \Theta - \alpha_1, \quad t_2 = \Theta - \alpha_2, \quad t_2 - \frac{\pi}{2} = \Theta - \alpha_2 - \frac{\pi}{2}$$

sind.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,[\sin \delta_1 \cos \delta_2 - \cos \delta_1 \sin \delta_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2)], \\ y &= r \cos \delta_1 \sin (\alpha_1 - \alpha_2), \\ \xi &= \varrho\,[\sin \varphi' \cos \delta_2 - \cos \varphi' \sin \delta_2 \cos (\Theta - \alpha_2)], \\ \eta &= \varrho \cos \varphi' \sin (\Theta - \alpha_2). \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI; 15)}$$

Hierbei seien alle Strecken in Einheiten des äquatorealen Erdhalbmessers ausgedrückt. Es ist dann, wenn π_1 die Äquatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes bedeutet,

$$r = \operatorname{cosec} \pi_1 \qquad \text{(VI; 16)}$$

zu setzen. Für den Zeitpunkt der Bedeckung (Ein- oder Austritt) gilt dann die Fundamentalgleichung

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = k^2, \qquad \text{(VI; 17)}$$

von der die Lösung aller Aufgaben ausgeht, die sich aus der Beobachtung von Sternbedeckungen ergeben.

Soll die geographische Länge des Beobachtungsorts abgeleitet werden, so darf vorausgesetzt werden, daß ein genäherter Wert λ_0 der gesuchten Länge schon vorliegt. Die wahre Länge sei $\lambda = \lambda_0 + d\lambda$; die unbekannte Verbesserung $d\lambda$ ist klein, wenn sie im allgemeinen auch nicht als Differential angesehen werden darf. Bekannt sind ferner auf Grund vorausgegangener Ortsbestimmungen die geographische Breite φ (und damit auch φ' und ϱ nach den

Formeln des Abschnitts 5 bzw. nach Tabelle Anh. F I) sowie die Ortssternzeit Θ der Bedeckung. Die gleichzeitige Greenwicher Sternzeit ist dann

$$\bar{\Theta} = \Theta + \lambda = \bar{\Theta}_0 + d\lambda,$$

wenn wir mit

$$\bar{\Theta}_0 = \Theta + \lambda_0$$

den genäherten Wert von $\bar{\Theta}$ bezeichnen. Ebenso ist die Weltzeit der Beobachtung

$$T = T_0 + d\lambda.$$

Die genäherte Weltzeit T_0 bestimmt man nach (II; 51) zu

$$T_0 = \bar{\Theta}_0 - \bar{\vartheta} - (\bar{\Theta}_0 - \bar{\vartheta})_h (10 - \beta)^s,$$

wobei $\bar{\vartheta}$ die in den Jahrbüchern gegebene Greenwicher Sternzeit um 0^h WZ des Beobachtungstages bedeutet.

Mit dem Argument T_0 entnimmt man aus den Ephemeriden des Jahrbuchs die Koordinaten α_0, δ_0 und die Parallaxe π_0 des Mondes und die Koordinaten α_2, δ_2 des bedeckten Fixsterns. Die letzteren findet man im Jahrbuch in einer Liste aller vom Monde bedeckten Sterne für den Zeitpunkt der geozentrischen Konjunktion zwischen Mond und Stern angegeben — dieser Zeitpunkt ist von T_0 stets so wenig verschieden, daß die Änderungen des Sternorts wegen Präzession, Nutation und Aberration unmerklich bleiben. Die Mondkoordinaten müssen hingegen aus der Ephemeride streng interpoliert werden, am besten aus der des Nautical Almanac, die α_0, δ_0 für alle Weltzeitstunden und π_0 für 0^h und 12^h WZ jeden Tages enthält. Für den Beobachtungszeitpunkt Θ (bzw. T) sind dann mit genügender Annäherung

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \alpha' d\lambda, \quad \delta_1 = \delta_0 + \delta' d\lambda, \quad \pi_1 = \pi_0 + \pi' d\lambda$$

die genaueren Werte der Koordinaten und der Parallaxe des Mondes, wenn α', δ', π' die für T_0 gültigen Differentialquotienten der betreffenden Größen bedeuten.

Von den variablen Größen der Fundamentalgleichung (VI; 17) sind ξ, η streng bekannt, während von x, y mit Hilfe von (VI; 15), (VI; 16) die Näherungen x_0, y_0 berechnet werden können. Es nimmt dann, wenn mit x', y' die Ableitungen von x, y bezeichnet werden, (VI; 17) die Form

$$(x_0 + x' d\lambda - \xi)^2 + (y_0 + y' d\lambda - \eta)^2 = k^2 \qquad \text{(VI; 18)}$$

an, wird also zu einer quadratischen Gleichung für die Unbekannte $d\lambda$.

Nach einem von BESSEL[1]) vorgeschlagenen Verfahren löst man diese Gleichung folgendermaßen auf: Man berechne die Hilfsgrößen m, M, n, N nach

$$m \cos M = x_0 - \xi, \qquad n \cos N = x',$$
$$m \sin M = y_0 - \eta, \qquad n \sin N = y'.$$

---

[1]) F. W. BESSEL: Über die Vorausberechnung von Sternbedeckungen. Astron. Nachr. 7 (1829).

Dann läßt sich (VI; 18) auch in der Gestalt

$$m^2 \sin^2 (M - N) + [m \cos (M - N) + n d\lambda] = k^2$$

schreiben. Dividiert man diese Gleichung durch k^2 und setzt man

$$\frac{m}{k} \sin (M - N) = \cos \psi ,$$

so ergibt sich schließlich

$$d\lambda = -\frac{m}{n} \cos (M - N) \mp \frac{k}{n} \sin \psi , \qquad \text{(VI; 19)}$$

wobei das obere Zeichen für den Beginn, das untere für das Ende der Bedeckung gilt.

Es ist nun noch zu zeigen, wie die zur Berechnung von n, N nötigen Differentialquotienten x', y' gefunden werden, und wie sie zu dimensionieren sind, damit $d\lambda$ in Zeitsekunden erhalten wird. Aus (VI; 15), (VI; 16) ergibt sich durch Differentiation nach der Zeit für $T = T_0$

$$x' = r' \frac{x}{r} + r \{\delta' [\cos \delta_0 \cos \delta_2 + \sin \delta_0 \sin \delta_2 \cos (\alpha_0 - \alpha_2)] +$$
$$+ \alpha' \cos \delta_0 \sin \delta_2 \sin (\alpha_0 - \alpha_2)\},$$
$$y' = r' \frac{y}{r} + r [-\delta' \sin \delta_0 \sin (\alpha_0 - \alpha_2) + \alpha' \cos \delta_0 \cos (\alpha_0 - \alpha_2)],$$
$$r' = -\pi' r \operatorname{ctg} \pi_0 .$$

Bedenkt man, daß $\alpha_0 - \alpha_2$, $\delta_0 - \delta_2$ im Augenblick der Bedeckung sehr klein sind, so kann man mit ausreichender Genauigkeit stets

$$x' = r \{\delta' + \sin 1'' [\alpha' (\alpha_0 - \alpha_2) \cos \delta_0 \sin \delta_2 - \pi' (\delta_0 - \delta_2) \operatorname{ctg} \pi_0]\},$$
$$y' = r \{\alpha' \cos \delta_0 - \sin 1'' (\alpha_0 - \alpha_2) [\delta' \sin \delta_0 + \pi' \cos \delta_0 \operatorname{ctg} \pi_0]\}$$

schreiben. In der Praxis wird es, namentlich wenn $d\lambda$ klein ist, immer gestattet sein, sich auf das erste Glied in den geschweiften Klammern zu beschränken. Es ist also genähert

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\delta' = \delta' \operatorname{cosec} \pi_0 , \\ y' &= r\alpha' \cos \delta_0 = \alpha' \cos \delta_0 \operatorname{cosec} \pi_0 . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI; 20)}$$

Soll $d\lambda$ nach (VI; 19) in Zeitsekunden erscheinen, so müssen x', y' die Dimension Längeneinheit : Zeitsekunde, also α', δ' die Dimension Bogen : Zeitsekunde erhalten. Sind also $15 \Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die für T_0 aus dem Nautical Almanac entnommenen und in Bogensekunden ausgedrückten *stündlichen* Änderungen der Mondkoordinaten, so hat man

$$\alpha' = \frac{15 \Delta\alpha}{3600} \sin 1'' , \quad \delta' = \frac{\Delta\delta}{3600} \sin 1'' \qquad \text{(VI; 21)}$$

zu setzen. Es empfiehlt sich aber, statt dessen die Hilfsgrößen n, N aus

$$n \cos N = \Delta\delta, \quad n \sin N = 15\, \Delta\alpha \cos\delta_0 \qquad \text{(VI; 22)}$$

abzuleiten und dann das nach (VI; 19) erhaltene Ergebnis mit dem Faktor

$$C = \frac{3600 \sin \pi_0}{\sin 1''} \qquad \text{(VI; 23)}$$

zu multiplizieren, um es in Zeitsekunden zu verwandeln.

Mit der verbesserten Länge $\lambda = \lambda_0 + d\lambda$ wird man die Rechnung wiederholen, wobei man die Größen ξ, η und meist auch π, $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ unverändert aus der ersten Rechnung übernehmen kann. In den meisten Fällen wird die zweite Hypothese nur noch geringfügige Verbesserungen liefern oder das Ergebnis der ersten bestätigen.

Die Genauigkeit dieser Methode der Längenbestimmung wird durch die systematischen Fehler der Mondephemeride und durch die Unregelmäßigkeiten des Mondrandes stark beeinträchtigt, wie dies ja auch bei anderen absoluten Ortsbestimmungsmethoden mit Hilfe von Mondbeobachtungen der Fall ist. Um den Einfluß dieser Fehler abzuschätzen, nehmen wir an, daß $d\alpha_0$, $d\delta_0$, dk die Fehler der angenommenen Mondkoordinaten und des Mondhalbmessers sind — der letztere beruhe hauptsächlich auf der Beschaffenheit des Randprofils an der Ein- oder Austrittsstelle des Fixsterns. Differenziert man (VI; 18) nach x_0, y_0, $d\lambda$ einerseits und k andererseits, so ergibt sich

$$(x-\xi)\,[dx_0 + x'd\,(d\lambda)] + (y-\eta)\,[dy_0 + y'd\,(d\lambda)] = k\,dk$$

oder

$$d\,(d\lambda) = -\frac{(x-\xi)\,dx_0 + (y-\eta)\,dy_0 - k\,dk}{x'(x-\xi) + y'(y-\eta)}.$$

Setzt man nun

$$k \cos\tilde{\omega} = \xi - x, \quad k \sin\tilde{\omega} = \eta - y,$$

so bedeutet, wie man sich aus dem Bild der Projektion des Bedeckungsvorgangs auf die XY-Ebene leicht klar macht, $\tilde{\omega}$ den vom Nordpunkt der Mondscheibe aus nach Osten herum gezählten *Positionswinkel* der Ein- oder Austrittsstelle. Setzt man ferner gemäß (VI; 20), (VI; 21), (VI; 23)

$$Cx' = \Delta\delta, \quad Cy' = 15\,\Delta\alpha \cos\delta_0$$

und bezeichnet mit Δv den stündlichen Zuwachs der Mondlänge in der Bahn (Abb. 54), mit p den Positionswinkel der instantanen Bahnrichtung, so ist

$$\Delta\delta = \Delta v \cos p, \quad 15\,\Delta\alpha \cos\delta_0 = \Delta v \sin p.$$

Setzt man schließlich auf Grund von (VI; 20)

$$dx_0 = d\delta_0 \operatorname{cosec} \pi_0, \quad dy_0 = d\alpha_0 \cos\delta_0 \operatorname{cosec}\pi_0,$$

und nimmt man an, daß der angenommene Mondort gegen den wahren um ds und in Richtung des Positionswinkels q verschoben sei, so ist

$$dx_0 = ds \cos q \operatorname{cosec}\pi_0,$$
$$dy_0 = ds \sin q \operatorname{cosec}\pi_0.$$

Mit diesen Festsetzungen wird der in Zeitsekunden ausgedrückte Längenbestimmungsfehler

$$d\,(d\lambda) = -C\,\frac{ds \operatorname{cosec} \pi_0 \cos(\tilde{\omega} - q) + dk}{\Delta v \cos(\tilde{\omega} - p)}.$$

Nun beruht erfahrungsgemäß der Ephemeridenfehler zum überwiegenden Teil auf einem Fehler der *Mondlänge*, während der Fehler in Breite kaum ins Gewicht fällt. Wir nehmen daher an, daß die Verschiebung des Mondorts infolge der Unsicherheit der Ephemeride in Richtung der instantanen Mondbahn erfolgt, so daß $q = p$ gesetzt werden kann. Dann ist einfacher

$$d\,(d\lambda) = \frac{3600}{\sin 1''} \cdot \frac{ds + dk \sin \pi_0 \sec(\tilde{\omega} - p)}{\Delta v}$$

oder, wenn wir ds und den Fehler des scheinbaren Mondhalbmessers $d\sigma = dk \sin \pi_0$ in Bogensekunden ausdrücken,

$$d\,(d\lambda) = \frac{3600}{\Delta v}\,[ds + d\sigma \sec(\tilde{\omega} - p)].$$

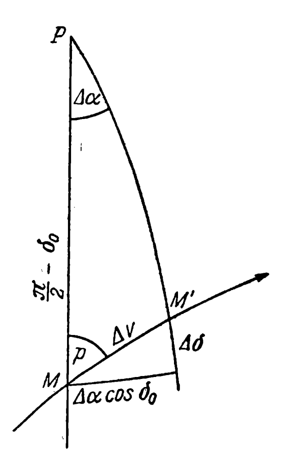


Abb. 54: Fehlereinflüsse bei Längenbestimmungen aus Sternbedeckungen

Da nun die Mondlänge in 27,3 Tagen um 360° wächst, ist der durchschnittliche Wert ihrer stündlichen Änderung

$$\overline{\Delta v} = \frac{360^\circ}{24 \cdot 27{,}3} = 1978''.$$

Benutzt man diesen Wert, so erhält man

$$d\,(d\lambda)^s = 1.82\,[ds'' + d\sigma'' \sec(\tilde{\omega} - p)],$$

wobei der Faktor rechts einen Mittelwert darstellt und in Wirklichkeit zwischen den Extremen 1.5 und 2.1 schwanken kann.

Ein Ephemeridenfehler ds von $1^s = 15''$ würde also zu einer Verfälschung der Längenbestimmung um rund eine halbe Zeitminute führen. Wird die gleiche Sternbedeckung an zwei verschiedenen Orten beobachtet, so fällt in der *Differenz* der geographischen Längen dieser Fehler natürlich heraus. Der Fehler $d\sigma''$ kann wegen der Unregelmäßigkeiten des Randprofils bis zu $2''$ betragen. Seine Wirkung ist am kleinsten, wenn $\cos(\tilde{\omega} - p) = \pm 1$, d. h. der Positionswinkel des Ein- oder Austritts mit dem der instantanen Bahn zusammenfällt, die Bedeckung also *zentral* verläuft. Für $\cos(\tilde{\omega} - p) = 0$, also bei *streifender* Bedeckung, wird der Faktor von $d\sigma$ unendlich groß, eine Längenbestimmung daher unmöglich. Für die Zwecke der Längenverbesserung wird man also möglichst zentrale Bedeckungen wählen, immerhin können die Randunregelmäßigkeiten auch dann Fehler bis zu 4^s verursachen.

Zum Schluß möge noch ein Wort über die *Vorausberechnung von Sternbedeckungen* gesagt werden. In den Jahrbüchern findet man Zeiten und

Positionswinkel der Bedeckungen für ausgewählte Orte (Sternwarten). So gibt das Berliner Astronomische Jahrbuch für verschiedene deutsche Sternwarten (z. Z. für Berlin, Frankfurt a. M. und München) die Bedeckungszeiten auf $0{,}1^m$ WZ und die Positionswinkel auf ganze Grade genau, während der Nautical Almanac diese Größen für eine Reihe von Orten des Britischen Weltreichs (Greenwich, Edinburgh, Toronto, Montreal, Vancouver, Calgary, Kapstadt, Johannesburg, Melbourne, Sidney) liefert. Da die Vorausberechnung nur den Zweck verfolgt, den Beobachter über die Zeit der Erscheinung ungefähr zu unterrichten, damit er seine Aufmerksamkeit rechtzeitig auf sie lenken kann, so sind Zeitangaben von der Genauigkeit einiger Minuten hinreichend. Unter dieser Voraussetzung darf man annehmen, daß in einem weiten Umkreis um einen Ort A_0, für den das Jahrbuch die Bedekkungszeiten angibt, diese Zeiten sich linear mit den geographischen Koordinaten ändern. Sind also λ_0, φ_0 die Koordinaten von A_0 und $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ diejenigen eines benachbarten Ortes A, so erhält man, wenn T_0 die Bedeckungszeit für A_0 bezeichnet, für A die Zeit

$$T = T_0 + a\Delta\lambda + b\Delta\varphi.$$

Die Koeffizienten a, b sind in den Jahrbüchern neben T_0 zu finden. Die Formel kann im allgemeinen für Entfernungen bis zu 200 km benutzt werden, ohne daß der Fehler 2^m übersteigt. Für streifende Bedeckungen wird die Unsicherheit erheblich größer.

Ist man gezwungen, die Vorausberechnung der Sternbedeckung selbst vorzunehmen, so kann man dies nach dem gleichen Verfahren tun, das oben für die Längenverbesserung vorgeschlagen wurde. Man geht von einer der Konjunktionszeit benachbarten vollen Weltzeitstunde T_0 aus, entnimmt für diese aus dem Jahrbuch die Mondkoordinaten und setzt für den unbekannten Zeitpunkt der Bedeckung

$$T = T_0 + t.$$

Es ist dann, entsprechend (VI; 19), für Ein- und Austritt

$$t = -\frac{m}{n}\cos(M - N) \mp \frac{k}{n}\sin\psi,$$

wobei m, M, k die gleiche Bedeutung wie früher haben, während zur Berechnung von n, N nunmehr

$$n\cos N = x' - \xi', \qquad n\sin N = y' - \eta'$$

zu setzen ist, da ja ξ, η die gesuchte Bedeckungszeit Θ enthalten. Und zwar ist nach (VI; 15)

$$\xi' = \varrho\,\Theta'\cos\varphi'\sin\delta_2\sin(\Theta - \alpha_2),$$

$$\eta' = \varrho\,\Theta'\cos\varphi'\cos(\Theta - \alpha_2),$$

wobei

$$\Theta' = \frac{366\cdot 2422}{365\cdot 2422}\cdot 15\sin 1''$$

die in Bogenmaß ausgedrückte Änderung der Sternzeit in einer Sekunde mittlerer Zeit bedeutet. Entsprechend schreibt man statt (VI; 22)

$$n \cos N = \Delta \delta - 54\,147{,}84'' \, \varrho \cos \varphi' \sin \delta_2 \sin (\Theta - \alpha_2) \sin \pi_0 ,$$
$$n \sin N = 15 \, \Delta \alpha \cos \delta_0 - 54\,147{,}84'' \, \varrho \cos \varphi' \cos (\Theta - \alpha_2) \sin \pi_0 .$$

Bequemer und anschaulicher ist folgende halbgraphische Methode, die darauf beruht, daß man für mehrere der Konjunktionszeit benachbarte volle Weltzeitstunden die Größen

$$\frac{\xi - x}{k}, \qquad \frac{\eta - y}{k} \qquad \text{(VI; 24)}$$

berechnet. Diese Größen stellen die auf die Projektion des Mondmittelpunkts bezogenen und in Einheiten des Mondhalbmessers ausgedrückten Koordinaten der Projektion des Beobachtungsorts auf die XY-Ebene dar. Zeichnet man auf einen Bogen Millimeterpapier die Projektion des Mondrandes als Kreis vom Halbmesser 1, wobei die Einheit möglichst groß festgesetzt werde, so stellen die Punkte mit den Koordinaten (VI; 24) die scheinbaren Örter des Sternes relativ zum Monde zu den gewählten Zeiten dar. Verbindet man diese Örter durch gerade Strecken, so ergeben die Schnittpunkte dieses Polygonzugs mit dem Kreis die genäherten Örter und Positionswinkel des Ein- und Austritts, während die zugehörigen Zeiten sich durch Ausmessung der Strecken leicht ermitteln lassen. Die einmal vorbereitete Zeichnung läßt sich für die Vorausberechnung beliebig vieler Sternbedeckungen verwenden.

VII. KAPITEL

ORTSBESTIMMUNG IM POLARGEBIET

62. Schwierigkeiten der Ortsbestimmung in der Nähe der Erdpole

Von einigen wenigen Bemerkungen abgesehen, haben wir in den vorhergehenden Kapiteln die besonderen Umstände unberücksichtigt gelassen, die sich ergeben, wenn sich der Beobachtungsort in der Nähe des Nord- oder Südpols der Erde befindet. In der Tat sieht der Polarforscher, der bis in die Nachbarschaft dieser singulären Punkte des geographischen Koordinatensystems vordringt, sich gewissen Schwierigkeiten gegenüber, die eine besondere Behandlung des Ortsbestimmungsproblems erforderlich machen.

Für den Theoretiker wäre es nicht ohne Reiz, die im Vorhergehenden beschriebenen allgemeinen Methoden der Ortsbestimmung einzeln auf ihre Brauchbarkeit im Polargebiet zu untersuchen und ihnen, wenn erforderlich, die Form zu geben, die sie für die Zwecke des Polarforschers geeignet machen würde. Das praktische Bedürfnis nach einer solchen Untersuchung ist aber gering, wie man auch beim Durchblättern der umfangreichen Ortsbestimmungsliteratur bemerkt, die nur wenige Beiträge zum Problem der Orientierung in Polnähe aufweist. Der Polarforscher selbst wird sich in Anbetracht der schwierigen geographischen und klimatischen Umwelt, in der er seine Arbeiten ausführen muß, immer auf die einfachsten und mit den geringsten Hilfsmitteln durchführbaren Beobachtungs- und Reduktionsmethoden zufrieden geben, so daß auch wir uns auf die Beschreibung einiger der zweckmäßigsten Verfahren beschränken dürfen.

Die Auswahl der Ortsbestimmungsmethoden im Polargebiet wird durch zwei Umstände entscheidend beeinflußt: Zunächst sind während des Polarsommers, der eigentlichen Reisezeit des Forschers, von allen Gestirnen nur die Sonne und zeitweilig auch der Mond sichtbar. Nur selten wird der Beobachter im Universalinstrument einen der hellen Planeten (nur Venus und allenfalls noch Jupiter kommen in Frage) einstellen können. Weitaus die größte Zahl der Beobachtungen, die in den Tagebüchern der Polarreisenden zu finden sind, bestehen daher auch aus Messungen der Sonnenhöhe. Die zweite Eigentümlichkeit liegt natürlich in den singulären Eigenschaften der Pole im System der geographischen und astronomischen Koordinaten begründet. Wir haben gesehen, daß an den Polen selbst verschiedene Begriffe und Größen, derer wir uns bedient haben, ihren Sinn verlieren: es gibt an diesen Punkten weder Meridian noch Ersten Vertikal, weder Ortszeit noch geographische Länge, weder Stundenwinkel noch Azimut. Das Nautische Dreieck selbst, aus dem die weitaus größte Zahl unserer Formeln hergeleitet wurde, degeneriert

da zwei Ecken, Himmelspol und Zenit, zusammenfallen. Auch in der *Umgebung* der Pole, der näheren ($|\varphi| > 85°$) wie der weiteren ($|\varphi| > 80°$), wird sich dieser Umstand — teils störend, teils aber auch zum Vorteil — bemerkbar machen.

Eine ganze Reihe von Methoden, die für mittlere und kleine Breiten sehr brauchbar sind, lassen sich in der unmittelbaren Nähe der Pole nicht mehr verwenden; so alle Methoden der absoluten Zeit- und Längenbestimmung sowie die Beobachtung und Verwendung absoluter Azimute. Man kann damit rechnen, daß es dem Polarforscher mit seinen beschränkten instrumentellen Hilfsmitteln noch bis zur Breite von 89° möglich ist, die Lage des Meridians (wenn auch unsicher) festzulegen. Darüber hinaus (d. h. in einem Umkreis von etwa 100 km Halbmesser um den Pol) macht die Unsicherheit der Messungen die Beobachtungen illusorisch. Dabei ist aber zu beachten, daß die Begriffe Zeit und Azimut trotzdem eine Bedeutung behalten, sogar an den Polen selbst. Zwar verlieren die Begriffe „Ortszeit“, „Sternzeit“, „mittlere und wahre Sonnenzeit“ ihren ursprünglichen Sinn, da sie an die Lage des Himmelsmeridians gebunden sind, die an den Polen unbestimmt wird. Natürlich aber gibt es auch für die Pole eine konventionelle Zeit, als die man praktischerweise die für den ganzen Planeten gültige „*Weltzeit*“, die Ortszeit des Greenwicher Meridians, bestimmt. Am Pol selbst läßt sich auch das *Azimut* definieren, indem man den Nullpunkt der Azimutzählung durch die Richtung des Nullmeridians festlegt. Diese Definition läßt sich allerdings für die Polumgebung nicht ohne weiteres verwenden.

Auch die Unbestimmbarkeit der geographischen Länge in der nächsten Umgebung der Pole bedeutet keineswegs, daß die Ortsbestimmung als solche unsicher wird. Der Pol selbst ist ja, ohne daß die Angabe einer „Länge“ überhaupt erforderlich wäre, durch die Maßzahl $\varphi = 90°$ (bzw. $\varphi = -90°$) eindeutig bestimmt. Desgleichen ist ein Ort in der Nähe des Pols durch die — in bezug auf den Pol als Anfangspunkt und den Nullmeridian als x-Achse gezählten — rechtwinkligen Koordinaten

$$x = \cos\varphi \cos\lambda, \quad y = \cos\varphi \sin\lambda$$

auf der als Einheitskugel anzusehenden Erdoberfläche wohlbestimmt. Wegen des Faktors $\cos\varphi$ sind diese Größen sehr klein und verschwinden am Pol gänzlich. Die Fehler dieser Örter, die von dem unsicheren λ herrühren, sind von der gleichen Größenordnung, wie wir sie aus kleineren Breiten gewohnt sind, denn es ist ja

$$dx = -\sin\lambda \cdot \cos\varphi\, d\lambda, \quad dy = \cos\lambda \cdot \cos\varphi\, d\lambda,$$

und der Fehler $d\lambda$, der für kleine Poldistanzen stark anwächst, wird durch den Faktor $\cos\varphi$ wieder auf das normale Fehlermaß herabgedrückt.

63. Die Zweihöhenmethode im Polargebiet

Diejenige exakte Methode, die bei Ortsbestimmungen im Polargebiet fast ausschließlich angewandt wird, beruht auf der Auswertung zweier Stern- oder Sonnenhöhen. Man bedient sich dabei zweckmäßig des in Abschnitt 38 be-

schriebenen Verfahrens von KRAFFT-HARZER zur Lösung der Zweihöhenaufgabe, das aber unter Ausnutzung der Vorteile, die die Nähe des Pols bietet, umgeformt werden kann.

Wenn man berücksichtigt, daß im Polargebiet mit großer Annäherung $|\sin\varphi| = 1$ ist, kann man auf die Auflösung der quadratischen Gleichung für $z = \sin\varphi$ ganz verzichten und die Gleichungen (V; 3) in der Form

$$x = (f_1 + f_2) \sec\lambda, \quad y = (f_1 - f_2) \sec\lambda \tag{VII; 1}$$

schreiben, wo zur Abkürzung $\lambda = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ und $\left(h_i = \frac{\pi}{2} - z_i\right)$

$$f_1 = \frac{\sin h_1 - \sin\varphi \sin\delta_1}{2\cos\delta_1}, \quad f_2 = \frac{\sin h_2 - \sin\varphi\sin\delta_2}{2\cos\delta_2}$$

gesetzt wurde. Bestimmt man ferner δ_1' und δ_2' durch

$$\sin\delta_1' = \sin\varphi\sin\delta_1, \quad \sin\delta_2' = \sin\varphi\sin\delta_2, \tag{VII; 2}$$

so folgt auch

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{\sin h_1 - \sin\delta_1'}{2\cos\delta_1} = \sin\frac{h_1 - \delta_1'}{2}\cos\frac{h_1 + \delta_1'}{2}\sec\delta_1, \\ f_2 &= \frac{\sin h_2 - \sin\delta_2'}{2\cos\delta_2} = \sin\frac{h_2 - \delta_2'}{2}\cos\frac{h_2 + \delta_2'}{2}\sec\delta_2. \end{aligned}\right\} \tag{VII; 3}$$

Hieraus ergibt sich nun ein äußerst schnell förderndes Näherungsverfahren zur Bestimmung der Unbekannten

$$x = \cos\varphi\cos t, \quad y = \cos\varphi\sin t.$$

Setzt man nämlich in erster Hypothese $\varphi = 90°$, d. h. also im Nordpolargebiet $\sin\varphi = 1$, im Südpolargebiet $\sin\varphi = -1$, so wird $\delta_1' = \delta_1$, $\delta_2' = \delta_2$, und die Formeln (VII; 3) und (VII; 1) ergeben die erste Näherung der Unbekannten, die in den meisten Fällen schon ausreichend genau sein wird. Ist eine zweite Näherung erforderlich, so berechnet man φ aus x oder y und hiermit δ_1', δ_2' aus (VII; 2), worauf die Rechnung wiederholt wird.

CHARLIER[1]) hat die gleiche Methode vorgeschlagen, nur benutzt er statt des mittleren Stundenwinkels $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ den der ersten Beobachtung (t_1) als zweite Unbekannte neben φ, so daß seine Formeln die schöne Symmetrie vermissen lassen, die der Methode von KRAFFT-HARZER zu eigen ist.

Die Bestimmung von t aus x und y wird natürlich bei großer Polnähe unsicher, desgleichen die der geographischen Länge, die wir, um einer Verwechselung mit

$$\lambda = t_2 - t = t - t_1$$

---

[1]) C. V. L. CHARLIER: Über geographische Ortsbestimmung in der Nähe der Pole. Astron. Nachr. 184, 1 (1910).

vorzubeugen, hier ausnahmsweise mit l bezeichnen wollen. Die Berechnung von l aus t ist natürlich wieder verschieden, je nachdem es sich um Stern- oder Sonnenbeobachtungen handelt. Der Polarforscher benutzt zweckmäßig eine Uhr, die nach Weltzeit geht und deren Korrektion durch funkentelegraphischen Zeitempfang oder aus einer der im vorigen Kapitel beschriebenen Methoden (Monddistanzen von der Sonne oder von Sternen) bekannt sei. Ist dann

$$\overline{m} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \Delta u$$

die Weltzeit des Mittels der Beobachtungszeiten, so ist bei Sonnenbeobachtungen die geographische Länge durch

$$l = \overline{m} + \mu - t$$

bestimmt, wobei μ die Zeitgleichung zur Weltzeit $\overline{m}$ bedeutet. Bei Sternbeobachtungen verwandle man die Greenwicher mittlere Ortszeit $\overline{m}$ in die Greenwicher Sternzeit $\overline{\Theta}$ (Abschnitt 18). Die Ortssternzeit ist dann zur Zeit des arithmetischen Mittels der beiden Beobachtungsmomente

$$\Theta = \overline{\Theta} - l = t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

und die geographische Länge

$$l = \overline{\Theta} - t - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Wegen der Unsicherheit von t, die sich auf l überträgt, ist es ratsam, die Größen

$$x = \cos\varphi \cos t, \quad y = \cos\varphi \sin t$$

selbst als rechtwinklige Koordinaten in eine Karte einzutragen, die ein Koordinatennetz mit dem Pol als Anfangspunkt enthält. Die positive x-Achse des (x, y)-Systems zeigt in die Richtung $t = 0$, d. h. also in die Winkelhalbierende der beiden Stundenkreise, in denen die Beobachtungen erfolgten. Die Richtungswinkel t wachsen für den Nordpol im Uhrzeigersinn, für den Südpol entgegengesetzt. Es ist nun noch eine Drehung des Koordinatensystems erforderlich, so daß die ξ-Achse des neuen (ξ, η)-Systems in die Richtung des Nullmeridians fällt. Es ist also

$$\xi = \cos\varphi \cos l = \cos\varphi \cos (T - t),$$
$$\eta = \cos\varphi \sin l = \cos\varphi \sin (T - t)$$

zu setzen, wobei $T = \overline{m} + \mu$ die wahre Sonnenzeit des Nullmeridians bedeutet, und man erhält somit als neue Koordinaten

$$\xi = x \cos T + y \sin T,$$
$$\eta = x \sin T - y \cos T.$$

Die Punkte (ξ, η) haben die Entfernung $\cos\varphi$ vom Anfangspunkt, die für einen weiten Bereich um den Pol genügend genau linear mit der sphärischen Poldistanz $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ wächst. Für weitere Poldistanzen ist zu beachten, daß (bei den üblichen Polkarten in stereographischer Projektion — siehe auch nächsten Abschnitt) die Halbmesser der Breitenkreise proportional $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ anwachsen. Es sind also ξ, η noch mit dem Faktor

$$2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\operatorname{cosec}\psi = \sec^2\frac{\psi}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}$$

zu multiplizieren, der aber für $\varphi = 85°$ nur um 0,19% und selbst für $\varphi = 80°$ um nicht mehr als 0,77% von der Einheit abweicht.

64. Die Standlinienmethode im Polargebiet

Wir haben im vorigen Abschnitt gezeigt, wie sich die Zweihöhenmethode für den Gebrauch in polnahen Gebieten umformen läßt. Ähnliche Überlegungen für andere, in der Praxis des Polarforschers ungebräuchliche Verfahren (z. B. das Dreihöhenproblem oder die Methode der Sterndurchgänge durch zwei Vertikalebenen) anzustellen, sei dem Leser überlassen. Wir können aber unsere Betrachtungen nicht schließen, ohne auf die in der Nautik und auf Expeditionen so beliebte *Standlinienmethode* einzugehen, die ja nichts anderes ist als ein graphisches bzw. halbgraphisches Verfahren zur Lösung der Zweihöhenaufgabe. Für arktische und antarktische Beobachtungsorte gestattet das Standlinienverfahren eine besonders einfache Handhabung und läßt sich fast ohne Rechnung durchführen.

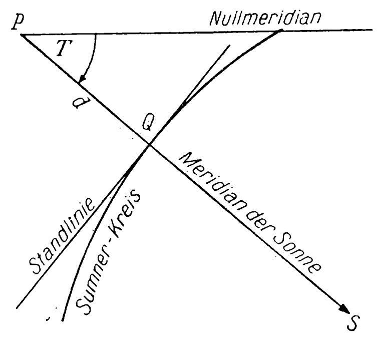


Abb. 55: Standlinie und SUMNERscher Kreis in der Nähe des Nordpols. (Die Krümmung des Kreises ist in der Abbildung stark übertrieben)

Wie schon weiter oben erwähnt wurde, bedient sich der Polarreisende gern einer Polarkarte in stereographischer Projektion. In dieser (siehe Abb. 55) sind die Meridiane gerade Linien, die durch den Pol P gehen, die Breitenkreise Kreise um P mit den Halbmessern

$$r = 2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}, \quad \left(\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

wobei der Erdhalbmesser gleich der Einheit gesetzt ist. Die Gültigkeit dieser Formel ist aus Abb. 56 unmittelbar abzulesen. Diese Projektion hat die Eigenschaft der Kreisverwandtschaft, d. h. alle Kreise auf der Erdkugel werden in Kreise projiziert (bzw., wenn sie durch den Pol P oder den Gegenpol P' gehen, in gerade Linien). Diese Abbildung ist auch winkeltreu — Kreise, die sich auf der Erdoberfläche rechtwinklig schneiden, tun dies auf der Karte auch.

Man habe nun, zu den Weltzeiten $\bar{m}_1$ und $\bar{m}_2$, die möglichst um etwa sechs Stunden auseinanderliegen sollen, zwei Sonnenhöhen h_1 und h_2 gemessen. Die dazugehörigen Deklinationen seien δ_1 und δ_2. Es sind dann $T_1 = \bar{m}_1 + \mu_1$, $T_2 = \bar{m}_2 + \mu_2$ die Stundenwinkel der wahren Sonne für den Nullmeridian.

Sei nun (Abb. 57) PS der Meridian der Länge T westlich Greenwich, über dem die Sonne zur Weltzeit $\bar{m}$ steht, so ist der geometrische Ort aller Punkte der Erdoberfläche, für die die Sonne die Höhe h bzw. die Zenitdistanz z hat, ein Kreis mit dem sphärischen Halbmesser z um denjenigen Punkt S des Meridians PS, in dessen Zenit die Sonne steht. Dieser Kreis schneidet den Meridian PS rechtwinklig. Es schneidet also auch auf der Karte (Abb. 55) die Abbildung dieses „SUMNERschen Kreises“ (vgl. Abschnitt 40) die Meridianabbildung PS rechtwinklig im Punkte Q. Der SUMNERsche Kreis, dessen Halbmesser (der Zenitdistanz z der Sonne entsprechend) stets groß ist, ist nur schwach gekrümmt, es ist also erlaubt, ihn in erster Näherung (die auch meistens ausreicht) durch eine auf PS in Q senkrechte Gerade zu ersetzen. Nun ist aber auf dem Erdmeridian (Abb. 57) PS gleich dem Bogen $\frac{\pi}{2} - \delta$, $Q'S$ gleich dem Bogen $z = \frac{\pi}{2} - h$; es ist demnach $PQ' = PS - Q'S = h - \delta$, und da wegen der Polnähe von Q' Bogen und Abbildung einander gleich gesetzt werden dürfen, so ist auch auf der Karte PQ bekannt.

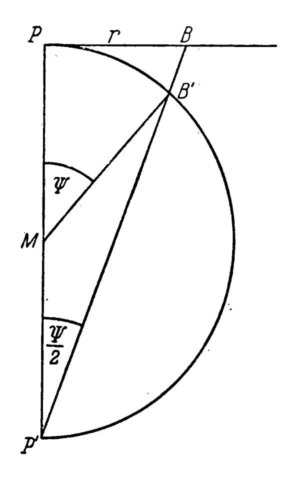


Abb. 56: Stereographische Projektion. Der Beobachtungsort B' wird vom Gegenpol P' aus auf die Tangentialebene im Pol P in den Bildpunkt B projiziert

Man findet demnach den Beobachtungsort mit meist völlig ausreichender Genauigkeit durch folgendes einfache Verfahren: Man ziehe auf der Karte vom Pol aus zwei Gerade (Meridiane) mit den Längen $T_1 = \bar{m}_1 + \mu_1$, $T_2 = \bar{m}_2 + \mu_2$ und markiere auf ihnen die Punkte Q_1, Q_2 mit den Polabständen $d_1 = h_1 - \delta_1$ bzw. $d_2 = h_2 - \delta_2$. Errichtet man dann in Q_1 und Q_2 die Lote auf den Meridianen, so schneiden sich diese in dem Beobachtungsort B. Dieses primitive Verfahren, das dem früher beschriebenen Standlinienverfahren völlig entspricht, liefert um so genauere Ergebnisse, je dichter B am Pol liegt. Die große Vereinfachung gegenüber der allgemeinen Methode (Abschnitt 40), die ja immerhin einige Rechnung erfordert, hat ihren Grund darin, daß man hier in der Lage ist, den nahen Pol selbst mit seinen singulären Eigenschaften im System der geographischen Längen und Breiten als *gegißten Ort* anzusehen.

Für den Fall, daß das Ergebnis dieser graphischen Methode nicht genau genug ist, kann man die strenge Lösung durch Näherungsrechnung ermitteln: Der SUMNERsche Kreis um S mit der Zenitdistanz z als Halbmesser schneidet

(Abb. 57) den Meridian der Sonne in den Punkten Q' und R', deren Polarprojektionen Q und R sind. In der Projektion halbiert der Mittelpunkt des SUMNERschen Kreises, M, die Strecke QR. Es sind dann (Erdhalbmesser $= 1$)

$$d = PQ = 2\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\frac{h-\delta}{2} \sim h-\delta,$$

$$D = PR = 2\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}\frac{h+\delta}{2}$$

Abb. 57: Stereographische Projektion des SUMNERschen Kreises

die Abstände des polnächsten und polfernsten Punktes des Kreises vom Pol. Der Halbmesser des projizierten SUMNERschen Kreises ist

$$\varrho = \frac{1}{2}(D-d) = \operatorname{ctg}\frac{h+\delta}{2} - \operatorname{tg}\frac{h-\delta}{2} = \frac{\cos h}{\sin\frac{h+\delta}{2}\cos\frac{h-\delta}{2}},$$

der Polabstand des Mittelpunktes M

$$\sigma = \frac{1}{2}(D+d) = \operatorname{ctg}\frac{h+\delta}{2} + \operatorname{tg}\frac{h-\delta}{2} = \frac{\cos\delta}{\sin\frac{h+\delta}{2}\cos\frac{h-\delta}{2}}.$$

In der Kartenebene lautet demnach die Gleichung des SUMNERschen Kreises, dessen Mittelpunkt auf dem Meridian mit der geographischen Länge T liegt,

$$(x - \sigma\cos T)^2 + (y - \sigma\sin T)^2 = \varrho^2.$$

Die Koordinaten x, y des Beobachtungsortes B erhält man dann aus einer der Lösungen der beiden quadratischen Gleichungen

$$(x-\sigma_1 \cos T_1)^2+(y-\sigma_1 \sin T_1)^2=\varrho_1^2\,,$$
$$(x-\sigma_2 \cos T_2)^2+(y-\sigma_2 \sin T_2)^2=\varrho_2^2,$$

wenn die Indizes 1, 2 den beiden Beobachtungen zugeordnet werden. Da nun die zu B gehörigen Größen x, y klein gegen ϱ, σ sind, kann man schreiben

$$x \cos T_1+y \sin T_1=\frac{\sigma_1^2-\varrho_1^2+x^2+y^2}{2\sigma}\,,$$

$$x \cos T_2+y \sin T_2=\frac{\sigma_2^2-\varrho_2^2+x^2+y^2}{2\sigma}$$

oder, wegen $\sigma^2-\varrho^2=\sigma^2-(\sigma-d)^2=2\sigma d-d^2$,

$$x \cos T_1+y \sin T_1=d_1+\frac{1}{2\sigma_1}(x^2+y^2-d_1^2)\,,$$

$$x \cos T_2+y \sin T_2=d_2+\frac{1}{2\sigma_2}(x^2+y^2-d_2^2)\,,$$

und es sind auf den rechten Seiten die quadratischen Glieder klein von der zweiten Ordnung.

Vernachlässigt man diese Glieder in erster Näherung, so ergeben sich zwei lineare Gleichungen, die den in der obigen graphischen Lösung benutzten *Standlinien* genau entsprechen. In der zweiten Näherung werden die Polabstände[1])

$$d_1=2\operatorname{tg}\frac{h_1-\delta_1}{2}\sim h_1-\delta_1\,,$$

$$d_2=2\operatorname{tg}\frac{h_2-\delta_2}{2}\sim h_2-\delta_2$$

um die Verbesserungen

$$\varDelta d_1=\frac{x^2+y^2-d_1^2}{2\sigma_1}\,,\qquad \varDelta d_2=\frac{x^2+y^2-d_2^2}{2\sigma_2}$$

vergrößert, worauf man B als Schnittpunkt der verbesserten Standlinien erhält. Bei der Berechnung der $\varDelta d$ benutzt man die aus der ersten Näherung gewonnenen Werte von x und y. Offenbar ist dann $x^2+y^2-d^2$ gleich dem Quadrat des Abstandes q des Beobachtungsortes von dem betreffenden Sonnenmeridian. Man hat also bei der verbesserten graphischen Lösung die Polabstände d der Standlinien um

$$\varDelta d=\frac{1}{2}\,q^2 \sin\frac{h+d}{2}\cos\frac{h-d}{2}\sec\delta$$

---

[1]) Die Näherungen $d=h-\delta$ sind bis auf Glieder von *dritter* Ordnung genau.

zu vergrößern. Bei Verwendung dieser Formel ist zu beachten, daß alle Größen in Einheiten des Erdhalbmessers a ausgedrückt sind. Ist der Maßstab der Karte so gewählt, daß 1° in der Umgebung des Pols die Länge eins (etwa 1 dm) hat, so ist $a = \frac{180}{\pi} = 57.296$. Sind d und q in dieser Einheit gemessen (q kann mit dem Maßstab aus der Karte entnommen werden), so erhält man

$$\Delta d = \frac{q^2}{2a} \sin \frac{h + \delta}{2} \cos \frac{h - \delta}{2} \sec \delta \quad \left(\lg \frac{1}{2a} = 7{,}94085 - 10 \right)$$

in der gleichen Einheit. Den Faktor $\cos \frac{h - \delta}{2}$ in dieser Formel kann man immer fortlassen, da er sich von der Einheit hinreichend wenig unterscheidet.

Für die Erzielung der größten Genauigkeit gelten selbstverständlich die gleichen Regeln, die aus den Fehlerbetrachtungen des Abschnitts 38 folgen. Es sollen also die beiden Azimute möglichst um 90° verschieden sein. Für Sonnenbeobachtungen bedeutet dies, daß die beiden Beobachtungen mit etwa sechsstündiger Zeitdifferenz anzustellen sind, denn in der Nähe der Pole unterscheiden sich bei mäßiger Höhe der Gestirne Azimut- und Stundenwinkeldifferenzen nur wenig. Bei Beachtung dieser Vorschrift schneiden sich die Standlinien nahezu rechtwinklig und gewährleisten daher eine möglichst scharfe Bestimmung des Schnittpunkts.

ANHANG

A. Formeln und Sätze aus der sphärischen Trigonometrie

I. Grundformeln im gewöhnlichen sphärischen Dreieck:

$$\left.\begin{aligned} &\textit{Cosinussatz:} & \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma\,, \\ &\textit{Sinus-Cosinussatz:} & \sin c \cos \alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma\,, \\ &\textit{Sinussatz:} & \sin c \sin \alpha &= \sin a \sin \gamma\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

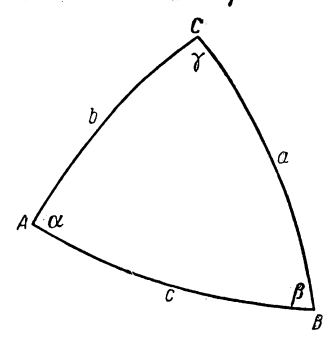


Abb. 58:
Sphärisches Dreieck

Diese Sätze gelten, wenn man (Abb. 58) für c irgend eine Seite und für α einen der ihr anliegenden Winkel nimmt. Für jedes Dreieck lassen sich also drei verschiedene Cosinus- und Sinussätze und sechs verschiedene Sinus-Cosinussätze aufschreiben. Ebenso gelten, wie man aus dem „Polardreieck" nachweist, in dem Seiten und Winkel bzw. deren Supplemente vertauscht erscheinen, die entsprechenden Sätze:

$$\left.\begin{aligned} \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c\,, \\ \sin \gamma \cos a &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \cos c\,, \\ \sin \gamma \sin a &= \sin \alpha \sin c\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die dritte (Sinussatz) ist mit der entsprechenden Formel des Systems (1) identisch.

Dividiert man die letzten beiden Formeln der Systeme (1) oder (2) durcheinander, so ergibt sich eine der sechs Formen des *Cotangentensatzes*:

Cotangentensatz: $\cos b \cos \gamma = \operatorname{ctg} a \sin b - \operatorname{ctg} \alpha \sin \gamma$ (3)

II. Grundformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck[1])

$$\left(c = \text{Hypothenuse}, \gamma = \frac{\pi}{2}\right):$$

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b \\ \sin c \cos \alpha &= \cos a \sin b \\ \sin c \sin \alpha &= \sin a \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \sin \beta \cos a \\ \sin \alpha \cos c &= \cos \beta \cos a \\ \sin \alpha \sin c &= \sin a \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \\ \cos \alpha &= \operatorname{ctg} c \operatorname{tg} b \\ \sin a &= \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} \beta \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

III. Tangentensätze:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)} \qquad \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right) \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = -\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)} \qquad \left(\sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right) \qquad (8)$$

IV. Die Gaussschen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2} &= \cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2} &= \sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2} &= \cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2} &= \sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

---

[1]) Diese Formeln ergeben sich als Spezialfälle der Grundformeln I. Ähnliche Sätze lassen sich auch für den Fall aufstellen, daß eine *Seite* des sphärischen Dreiecks den Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt.

V. Die Napierschen Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} &= \operatorname{tg}\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} &= \operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{b+c}{2} &= \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}\\
\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{b+c}{2} &= \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

folgen unmittelbar aus (9).

B. Trigonometrische Sätze und Reihenentwicklungen

I. *Satz*: Ist a eine kleine Größe, und ist

$$\operatorname{tg} y = \frac{a\sin x}{1-a\cos x}, \tag{11}$$

so kann man y in die rasch konvergierende trigonometrische Reihe

$$y = a\sin x + \frac{1}{2}a^2\sin 2x + \frac{1}{3}a^3\sin 3x + \cdots \tag{12}$$

entwickeln.

Beweis: Man betrachte in (11) y als Funktion von a. Dann ist

$$\frac{dy}{da} = \frac{d\operatorname{tg} y}{da}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{\sin x}{1-2a\cos x+x^2}. \tag{13}$$

Der Ansatz

$$y = \alpha_1\sin x + \alpha_2\sin 2x + \alpha_3\sin 3x + \cdots,$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{d\alpha_1}{da}\sin x + \frac{d\alpha_2}{da}\sin 2x + \frac{d\alpha_3}{da}\sin 3x + \cdots,$$

führt dann auf

$$\left.\begin{aligned}
\sin x &= (1-2a\cos x + a^2)\cdot\left(\frac{d\alpha_1}{da}\sin x + \frac{d\alpha_2}{da}\sin 2x + \cdots\right) =\\
&= \sin x\left[(1+a^2)\frac{d\alpha_1}{da} - a\frac{d\alpha_2}{da}\right] +\\
&\quad + \sin 2x\left[-a\frac{d\alpha_1}{da} + (1+a^2)\frac{d\alpha_2}{da} - a\frac{d\alpha_3}{da}\right] +\\
&\quad + \sin 3x\left[-a\frac{d\alpha_2}{da} + (1+a^2)\frac{d\alpha_3}{da} - a\frac{d\alpha_4}{da}\right] + \cdots.
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Damit diese Gleichung für alle x identisch erfüllt sei, verschwinden auf der rechten Seite die Koeffizienten sämtlicher trigonometrischer Glieder bis auf den des ersten, der gleich eins zu setzen ist. Es ergeben sich auf diese Weise, wenn man in Übereinstimmung mit (13) noch $\frac{d\alpha_1}{da} = 1$ setzt, Rekursionsformeln für $\frac{d\alpha_i}{da}$ $(i = 2, 3 \ldots)$, und man findet

$$\frac{dy}{da} = \sin x + a \sin 2x + a^2 \sin 3x + \cdots,$$

woraus durch Integration die Behauptung (12) hervorgeht, denn da wegen (11) für $x = 0$ auch $y = 0$ folgt, so muß offenbar die Integrationskonstante ebenfalls gleich null gesetzt werden.

II. *Satz*: Ist b eine von eins wenig verschiedene Konstante, und gilt

$$\operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} x,$$

so läßt sich dieser Fall auf den vorigen zurückführen.

Es ist nämlich:

$$\operatorname{tg}(y - x) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x \frac{b - 1}{1 + b \operatorname{tg}^2 x}$$

oder, wenn man

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}, \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

einsetzt,

$$\operatorname{tg}(y - x) = \frac{\frac{b-1}{b+1} \sin 2x}{1 - \frac{b-1}{b+1} \cos 2x},$$

woraus nach (11), (12) die Reihe

$$y = x + \frac{b-1}{b+1} \sin x + \frac{1}{2} \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^2 \sin 2x + \frac{1}{3} \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3 \sin 3x + \cdots$$

folgt, die rasch konvergiert, wenn b nahezu 1 ist.

III. *Satz*: Ist a eine kleine Konstante, und ist

$$y = \sqrt{1 + 2a \cos x + a^2},$$

so ergibt sich die rasch konvergierende Reihe

$$\ln y = a \cos x - \frac{1}{2} a^2 \cos 2x + \frac{1}{3} a^3 \cos 3x \mp \cdots.$$

Beweis: Durch Koeffizientenvergleichung (nach dem gleichen Verfahren wie beim Beweis von Satz I) findet man

$$\frac{1}{2}\frac{d}{da}\ln(1+2a\cos x+a^2)=\frac{\cos x+a}{1+2a\cos x+a^2}=$$

$$=\cos x-a\cos 2x+a^2\cos 3x\mp\cdots,$$

woraus durch Integration die Behauptung unmittelbar folgt.

IV. *Satz*: Sind α, β, γ drei Winkel, deren Summe null ist, so gilt

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Beweis:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=$$

$$=\sin\alpha+\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=$$

$$=\sin\alpha(1-\cos\beta)+\sin\beta(1-\cos\alpha)=$$

$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

C. Lösung einer trigonometrischen Gleichung

Eine unbekannte Winkelgröße x sei durch die Gleichung

$$a\cos x+b\sin x=c \tag{15}$$

gegeben.

I. *Trigonometrische Lösung*: Man setze

$$a=m\cos n,\quad b=m\sin n. \tag{16}$$

Dann läßt sich (15) in der Form

$$m\cos(x-n)=c \tag{17}$$

schreiben. Wenn c im Verhältnis zu m klein ist, kann man hieraus x genau bestimmen; andernfalls benutzt man besser die Tangentenformel

$$\operatorname{tg}^2\frac{x-n}{2}=\frac{1-\cos(x-n)}{1+\cos(x-n)}=\frac{m-c}{m+c}. \tag{18}$$

Statt (16) kann man auch setzen:

$$a=m\sin n,\quad b=m\cos n, \tag{19}$$

und erhält dann statt (17)

$$m\sin(x+n)=c. \tag{20}$$

II. *Algebraische Lösung*: Man setze

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Dann erhält (15) die Form

$$a(1-y^2) + 2by = c(1+y^2)$$

oder

$$y^2(a+c) - 2by = a - c.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung ergibt sich die Lösung

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{a+c}\left(b \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}\right).$$

Führt man statt a, b, c die neuen Größen

$$\alpha = \frac{a+c}{b}, \quad \beta = \frac{a-c}{b}$$

ein, so lautet die quadratische Gleichung

$$\alpha y^2 - 2y = \beta \tag{21}$$

und hat die Lösungen

$$y = \frac{1}{\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1+\alpha\beta}\right). \tag{22}$$

III. *Erste Reihenentwicklung*: Ist (vgl. Lösung II) β klein, so kann man unter Umständen y in eine Potenzreihe nach β entwickeln. Nach (22) und dem binomischen Satz ist

$$y = \frac{1}{\alpha}\left[1 \pm (1+\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[1 \pm \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\beta - \frac{1}{8}\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{16}\alpha^3\beta^3 - \frac{5}{128}\alpha^4\beta^4 + \cdots\right)\right].$$

Für diejenige der beiden Lösungen, die klein von der Ordnung β ist, gilt das negative Zeichen vor der inneren Klammer, und es ist

$$y = -\frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{1}{4}\alpha\beta + \frac{1}{8}\alpha^2\beta^2 - \frac{5}{64}\alpha^3\beta^3 + \cdots\right). \tag{23}$$

Die Konvergenz ist besonders rasch, wenn neben β auch α klein ist. In diesem Falle wird man sich mitunter schon mit der ersten Näherung

$$y = -\frac{1}{2}\beta + \cdots$$

begnügen können, deren Fehler von der dritten Ordnung ist.

IV. *Zweite Reihenentwicklung*: Unter Umständen ist es erwünscht, auch für

$$x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} y$$

eine nach Potenzen von α und β fortschreitende Reihe zu besitzen. Hierfür gibt P. HARZER folgendes Verfahren an:

Aus (21)

$$\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \beta$$

folgt durch partielle Differentiation nach α, x bzw. β, x

$$\partial \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\partial x}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(1 - \alpha \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right),$$

$$-\partial \beta = \frac{\partial x}{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(1 - \alpha \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$$

und somit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\right) \frac{1 - \alpha \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

oder, mit Rücksicht auf (22)

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{1}{1 - \alpha \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha\beta}}. \tag{24}$$

Für die Lösung, die zu dem negativen Vorzeichen von (22), also dem positiven Vorzeichen von (24) gehört, ist nach dem binomischen Satz

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \beta} = (1 + \alpha\beta)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{3}{8}\alpha^2\beta^2 \mp \cdots = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{2i}{i} \frac{\alpha^i \beta^i}{2^{2i}}. \tag{25}$$

Es wird nun behauptet, daß die gesuchte Reihenentwicklung von der Form

$$x = a_{00}\beta - (a_{10}\beta^3 + a_{11}\beta^2\alpha) + (a_{20}\beta^5 + a_{21}\beta^4\alpha + a_{22}\beta^3\alpha^2) \mp \cdots = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} (-1)^i a_{ik} \beta^{2i-k+1} \alpha^k \tag{26}$$

sei. Differenziert man (26) partiell nach α, so erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} (-1)^i k\, a_{ik} \beta^{2i-k+1} \alpha^{k-1},$$

wobei in der Summe über k das Glied $k = 0$ ausgelassen werden konnte, da es ja gleich null ist. Ersetzt man den Summationsindex k durch $k+1$, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^i (k+1)\, a_{i,k+1} \beta^{2i-k} \alpha^k .$$

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} (-1)^i (2i-k+1)\, a_{ik} \beta^{2i-k} \alpha^k ,$$

und die Differenz dieser beiden Ausdrücke ergibt

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \beta} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^i [\,(k+1)\, a_{i,k+1} - (2i-k+1)\, a_{ik}]\, \beta^{2i-k} \alpha^k] - \\ - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (i+1)\, a_{ii} \beta^i \alpha^i . \tag{27}$$

Vergleicht man (27) mit (25), so findet man, daß nur die letzte Summe rechts von null verschieden sein kann, während die Koeffizienten der Doppelsumme identisch verschwinden. Es ist also

$$a_{ii} = -\binom{2i}{i} \frac{1}{2^{2i}(i+1)} = -\binom{2i+1}{i} \frac{1}{2^{2i}(2i+1)} ,$$

$$a_{ik} = \frac{k+1}{2i-k+1}\, a_{i,k+1} \qquad (k = 0,\ 1, \cdots i-1)$$

oder, wie man hieraus leicht herleitet[1]),

$$a_{ik} = -\binom{2i+1}{k} \frac{1}{2^{2i}(2i+1)} \qquad (k = 0,1, \cdots i).$$

Somit ist für die eine Lösung unserer Gleichung

$$x = -\beta + \frac{\beta^2}{3\cdot 4}(\beta + 3\alpha) - \frac{\beta^3}{5\cdot 4^2}(\beta^2 + 5\beta\alpha + 10\alpha^2) + \\ + \frac{\beta^4}{7\cdot 4^3}(\beta^3 + 7\beta^2\alpha + 21\beta\alpha^2 + 35\alpha^3) - \cdots . \tag{28}$$

Die Konvergenz der Reihe (28) wird folgendermaßen bestätigt: Es ist offenbar

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{2i}(2i+1)} \binom{2i+1}{k} \beta^{2i-k+1} \alpha_k <$$

$$< \xi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\beta|^{2i+1}}{2^{2i}(2i+1)} \sum_{k=0}^{2i+1} \binom{2i+1}{k} \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^k ,$$

[1]) Man zeigt, daß diese Formel die obige Rekursionsgleichung erfüllt. Da sie auch für $k = i$ gilt, so gilt sie demnach auch für jedes kleinere k.

da auf der rechten Seite dieser Ungleichung nicht nur alle Glieder positiv genommen sind, sondern auch die innere Summe über $k = i$ hinaus bis $k = 2i + 1$ fortgesetzt worden ist. Nach dem binomischen Satz ist aber

$$\sum_{k=0}^{2i+1} \binom{2i+1}{k} \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^k = \left(1 + \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\right)^{2i+1},$$

also

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(|\alpha| + |\beta|)^{2i+1}}{2^{2i}(2i+1)} = 2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{2}\right)^{2i+1} =$$

$$= 2 \ln \frac{1 + \frac{1}{2}(|\alpha| + |\beta|)}{1 - \frac{1}{2}(|\alpha| + |\beta|)}.$$

Diese Summe konvergiert bekanntlich für $\frac{1}{2}(|\alpha| + |\beta|) < 1$. In allen Fällen, in denen eine Anwendung dieser Reihenentwicklung nützlich ist, weist man leicht nach, daß diese Bedingung erfüllt ist.

V. Die *zweite Lösung* der Gleichung (15) bzw. (21) läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen ebenfalls durch rasch konvergente Reihen von der Form (23) bzw. (28) darstellen. Wählt man in (22) das positive Zeichen, so ist

$$y = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \sqrt{1 + \alpha\beta}\right) = \frac{-\alpha\beta}{\alpha\left(1 - \sqrt{1 + \alpha\beta}\right)} = -\frac{\beta}{1 - \sqrt{1 + \alpha\beta}}.$$

Setzt man nun

$$x = \pi + z,$$

so wird

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{z}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{z}{2},$$

also

$$u = \operatorname{tg}\frac{z}{2} = -\frac{1}{y} = \frac{1}{\beta}\left(1 - \sqrt{1 + \alpha\beta}\right)$$

und

$$x = \pi + 2 \operatorname{arc\,tg} u.$$

Die Reihenentwicklungen für $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ bzw. $x - \pi$ folgen also aus (23) bzw. (28), indem man α und β vertauscht.

D. Einige Begriffe und Sätze aus der Theorie der Beobachtungsfehler

I. *Zufällige und systematische Fehler.*

Unter dem *wahren Fehler* einer beobachteten Größe versteht man die Differenz zwischen dem beobachteten und dem wahren Wert. Er setzt sich im allgemeinen aus zwei Teilen zusammen, dem *systematischen* und dem *zufäl-*

ligen Fehler. Wird die Beobachtung unter den gleichen Bedingungen wiederholt, so wird der systematische Anteil des Fehlers immer wieder in der gleichen Größe und mit dem gleichen Vorzeichen auftreten, während Größe und Vorzeichen des zufälligen Fehlers wechseln.

II. *Scheinbare Fehler.*

Im allgemeinen sind der wahre Wert der beobachteten Größe und daher auch die wahren Fehler unbekannt. Man ist daher gezwungen, an Stelle des wahren Wertes den *wahrscheinlichsten* zu setzen. Vorausgesetzt, daß alle systematischen Fehler eliminiert sind, bestimmt man den wahrscheinlichsten Wert folgendermaßen:

Liegt nur eine einzige Beobachtung vor, so wird ihr Ergebnis als der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Größe angesehen. Sind mehrere Beobachtungen (Messungen) unter gleichen Bedingungen (von gleicher Genauigkeit) angestellt worden, so ist der wahrscheinlichste Wert gleich dem *arithmetischen Mittel* aus allen Messungsergebnissen.

Der Unterschied zwischen dem beobachteten Einzelwert und dem wahrscheinlichsten Wert wird als der *scheinbare* Fehler der Beobachtung bezeichnet. Es gilt also der Satz (für Messungen gleicher Genauigkeit):

Die Summe der scheinbaren zufälligen Fehler aller Beobachtungen ist gleich null.

III. *Fehlergesetz und mittlerer Fehler.*

In Übereinstimmung mit der Erfahrung ergibt die Theorie der zufälligen Beobachtungsfehler u. a. folgende Gesetzmäßigkeiten:

1. Positive und negative Fehler gleichen Betrages treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf (sind gleich häufig).

2. Große Fehler sind weniger häufig als kleine.

3. Die Abnahme der Fehlerhäufigkeit mit zunehmendem Betrage erfolgt angenähert — und zwar um so genauer, je größer die Zahl der Beobachtungen war — nach dem GAUSS*schen Fehlergesetz.* Setzt man die Häufigkeit sehr kleiner Fehler ($x = 0$) gleich der Einheit, so ist diejenige eines Fehlers x nach diesem Gesetz

$$H(x) = e^{-h^2 x^2},$$

wobei h eine Konstante ist, die als das *Genauigkeitsmaß* der Beobachtungsreihe bezeichnet wird. Je größer h ist, um so schneller fällt die Häufigkeitskurve der Fehler mit wachsendem x gegen null ab, um so schmaler ist also der Bereich um $x = 0$, in dem die überwiegende Mehrzahl der vorkommenden Fehler eingeschlossen ist.

Als den *mittleren Fehler* (m. F.) einer Reihe von Beobachtungen gleicher Genauigkeit bezeichnet man die Größe

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Für $x = \varepsilon$ ist $\frac{d^2H}{dx^2} = 0$, hat also die GAUSSsche Fehlerkurve Wendepunkte. Der mittlere Fehler ist demnach ein geeignetes Maß für die Breite des Fehlerbereichs. Der wahrscheinlichste Wert des mittleren Fehlers einer Reihe von n gleich genauen Beobachtungen einer unbekannten Größe läßt sich folgendermaßen bestimmen:

Sind $w_1, w_2, \cdots w_n$ die wahren Fehler der n Messungen, so ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma w_i^2}{n}}$$

der wahrscheinlichste Wert des mittleren Fehlers. Es ist also ε der *quadratische Mittelwert* aller Einzelfehler. Sind $v_1, v_2, \ldots v_n$ die scheinbaren Fehler, so ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n-1}}. \tag{29}$$

Diese Formeln gestatten es also, den m. F. zu berechnen, der einer einzelnen Beobachtung anhaftet.

IV. *Fehlerzusammensetzung.*

Setzt sich der Gesamtfehler einer Beobachtung linear aus Einzelfehlern zusammen, die verschiedenen Fehlerquellen entstammen, sind also $x_1, x_2, \ldots x_r$ diese Einzelfehler, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_r$ deren mittlere Fehler und $a_1, a_2, \ldots a_r$ irgend welche Konstante, und ist der Gesamtfehler

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r,$$

so gilt für den mittleren Gesamtfehler

$$\varepsilon^2 = a_1^2 \varepsilon_1^2 + a_2^2 \varepsilon_2^2 + \cdots + a_r^2 \varepsilon_r^2.$$

Es ist nämlich

$$x^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} a_i a_k x_i x_k = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 x_i^2 + \sum_{i \neq k} a_i a_k x_i x_k. \tag{30}$$

Bildet man nun den Mittelwert der Fehlerquadrate, so ergibt sich

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 \varepsilon_i^2,$$

denn die Produkte $a_i a_k x_i x_k$ $(i \neq k)$, die dem Fehlergesetz zufolge Werte gleichen Betrages und entgegengesetzten Vorzeichens mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen können, werden sich bei der Summation über viele Beobachtungen mit großer Wahrscheinlichkeit gegenseitig aufheben. Der wahrscheinlichste Wert der zweiten Summe in (30) ist also null.

Beispiel 1: Es seien $v_1, v_2 \cdots v_n$ die (scheinbaren) Fehler von n beobachteten Größen. Der scheinbare Fehler des arithmetischen Mittels dieser Größen ist dann

$$v = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = 0.$$

Nach dem obigen Satz ist also

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{n^2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2)$$

das Quadrat des m. F. des arithmetischen Mittels. Waren die beobachteten Größen von gleicher Genauigkeit und ihr mittlerer Fehler gemäß (29)

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}},$$

so folgt

$$\varepsilon = \frac{1}{n}\sqrt{n\mu^2} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}}.$$

Beispiel 2: Sind bei einer Ortsbestimmung nach Kapitel V $d\varphi$ und $d\Delta u$ die Fehler der Bestimmung der geographischen Breite und der Uhrkorrektion, sind ferner df_1 und df_2 die Fehler der beiden beobachteten Fadenantritte, und ergibt die Theorie die Zusammenhänge

$$d\varphi = a_1 df_1 + a_2 df_2,$$
$$\cos\varphi\, d\Delta u = b_1 df_1 + b_2 df_2,$$

so erhält man die m. F. ε_φ und $\varepsilon_{\Delta u}$ der beiden Unbekannten aus

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon\sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \cos\varphi\,\varepsilon_{\Delta u} = \varepsilon\sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

wenn ε den gemeinsamen m. F. aller Fadenantritte bezeichnet. Da ferner (siehe Abb. 35) der „Zenitfehler“ $d\sigma$ der Beziehung

$$(d\sigma)^2 = (d\varphi)^2 + \cos^2\varphi\,(d\Delta u)^2$$

genügt und somit auch, wenn man viele dieser Gleichungen mittelt,

$$\varepsilon_\sigma^2 = \varepsilon_\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\varepsilon_{\Delta u}^2,$$

so ergibt sich

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2}.$$

E. Reduktion auf den Mittelwert

Das Beispiel 1 in D IV zeigt, daß der m. F. des arithmetischen Mittels aus n Beobachtungen mit wachsendem n wie $\frac{1}{\sqrt{n}}$ abnimmt. Man wird also zwecks Steigerung der Genauigkeit eine Beobachtung öfter wiederholen und das arithmetische Mittel der einzelnen Ergebnisse bilden. Die astronomischen Beobachtungen zur Ortsbestimmung beziehen sich aber auf die mit der Zeit veränderlichen Koordinaten (Zenitdistanzen oder Azimute) der Gestirne. Hier liegen die Dinge etwas verwickelter. Nur wenn die Veränderung der Koordinaten *linear* mit der Zeit erfolgt, ist es gestattet, das arithmetische

Mittel aus den beobachteten Größen dem arithmetischen Mittel der Beobachtungszeiten (Stundenwinkel) zuzuschreiben. Das wird aber im allgemeinen nicht der Fall sein, z. B. dann nicht, wenn es sich um Messungen von Zenitdistanzen in der Nähe des Meridians handelt (vgl. Abschnitt 32).

Es seien $z_1(t_1)$, $z_2(t_2), \cdots, z_n(t_n)$ n verschiedene Beobachtungen der von der Zeit t abhängigen Größe z, und es seien die arithmetischen Mittel der Beobachtungswerte und der Beobachtungszeiten

$$z_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i, \qquad t_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i .$$

Es wird dann zu der Zeit t_0 der Funktionswert $z = z_0 + \Delta z$ und zu z_0 die Zeit $t = t_0 + \Delta t$ gehören. Entwickelt man z_i um z_0 herum in eine TAYLORsche Reihe, so erhält man

$$z_i = z_0 + \frac{dz_0}{dt}[t_i - (t_0 + \Delta t)] + \frac{1}{2}\frac{d^2 z_0}{dt^2}[t_i - (t_0 + \Delta t)]^2 + \cdots. \tag{31}$$

Insbesondere wird zu der Zeit t_0 der Funktionswert

$$z = z_0 - \frac{dz_0}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2 z_0}{dt^2}(\Delta t)^2 - \cdots$$

gehören. Erfolgen die Beobachtungen $z_1 \cdots z_n$ kurz nacheinander, so ist die Zeitkorrektion Δt stets so klein, daß ihr Quadrat vernachlässigt werden darf, und es gilt daher in genügender Näherung zwischen $\Delta z = z - z_0$ und Δt die Beziehung

$$\Delta z = -\frac{dz_0}{dt}\Delta t . \tag{32}$$

Bildet man nun das arithmetische Mittel der Gleichungen (31), so ergibt sich

$$z_0 = z_0 + \frac{dz_0}{dt}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_0 - \Delta t) + \frac{1}{2}\frac{d^2 z_0}{dt^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_0 - \Delta t)^2 + \cdots$$

oder

$$\frac{dz_0}{dt}\left[\frac{1}{n}\sum(t_i - t_0) - \Delta t\right] + \frac{1}{2}\frac{d^2 z_0}{dt^2}\left[\frac{1}{n}\sum(t_i - t_0)^2 - \frac{2\Delta t}{n}\sum(t_i - t_0) + (\Delta t)^2\right] + \cdots = 0 . \tag{33}$$

Da nun $\sum(t_i - t_0) = 0$ ist und $(\Delta t)^2$ vernachlässigt werden kann, so erhält man, wenn man die Entwicklung (33) nach dem Gliede zweiter Ordnung abbricht,

$$0 = -\frac{dz_0}{dt}\Delta t + \frac{1}{2n}\frac{d^2 z_0}{dt^2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_0)^2$$

oder

$$\Delta t = \frac{1}{2n} \frac{\frac{d^2 z_0}{dt^2}}{\frac{dz_0}{dt}} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_0)^2$$

und wegen (32)

$$\Delta z = -\frac{1}{2n} \frac{d^2 z_0}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_0)^2 .$$

Bedeutet nun speziell $z(t)$ die Zenitdistanz eines Gestirns und t seinen Stundenwinkel, so ist nach den Formeln (II; 28) und (II; 32) des Abschnitts 16

$$\frac{dz}{dt} = \cos\delta \sin p , \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin z} \cos A \cos p$$

und demnach

$$\Delta z = -\frac{1}{2n} \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin z_0} \cos A \cos p \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_0)^2 . \tag{34}$$

Im Nautischen Dreieck ist nun nach dem Cosinussatz für Winkel (2)

$$\cos t = \cos A \cos p + \sin A \sin p \cos z ,$$

also

$$\cos A \cos p = \cos t - \sin A \sin p \cos z . \tag{35}$$

Ferner ist nach dem Sinussatz

$$\sin p \sin z = \cos\varphi \sin t ,$$

$$\sin A \sin z = \cos\delta \sin t$$

und somit

$$\sin A \sin p = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 t}{\sin^2 z} . \tag{36}$$

Setzt man (35) und (36) in (34) ein, so erhält man schließlich

$$\Delta z = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_0)^2 \cdot \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin z_0} \left[\cos t - \frac{\cos\varphi \cos\delta \cos z_0 \sin^2 t}{\sin^2 z_0} \right] ,$$

wobei eigentlich $t = t_0 + \Delta t$ zu setzen ist. Man darf sich aber, wenn nicht z_0 sehr klein ist, immer mit $t = t_0$ begnügen.

Bei Polhöhenbestimmungen aus Zirkummeridianzenitdistanzen mit dem Sextanten, die höchste Genauigkeit nicht erfordern und gewährleisten, kann man die Rechnung dadurch vereinfachen, daß man die zeitlichen Abstände der Beobachtungen als gleich annimmt, was ein geschickter Beobachter bei einiger Übung auch ungefähr erreicht. Ist dann

$$T = t_n - t_1$$

die Gesamtdauer der Beobachtungen, so ist offenbar

$$t_i = t_1 + \frac{i-1}{n-1} T \quad \text{und} \quad t_1 = t_0 - \frac{T}{2},$$

also

$$t_i = t_0 + \frac{2i-(n+1)}{2(n-1)} T.$$

Daraus folgt aber

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_0)^2 = \frac{T^2}{4(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n} [4i^2 - 4i(n+1) + (n+1)^2].$$

Mit den bekannten Summationsformeln

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

erhält man nach kurzer Rechnung

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_0)^2 = \frac{T^2}{12} \frac{n(n+1)}{n-1}$$

und somit

$$\Delta z = -\frac{T^2}{24} \frac{n+1}{n-1} \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z_0} \left(\cos t_0 - \frac{\cos\varphi\cos\delta\cos z_0 \sin^2 t_0}{\sin^2 z_0}\right).$$

Ist T in Zeitsekunden gegeben, und will man Δz in Bogensekunden erhalten, so hat man die rechte Seite dieser Formel noch mit $15^2 \sin 1''$ zu multiplizieren. Man vereinigt diesen Faktor am besten mit dem Zahlenfaktor $\frac{1}{24}$ zu

$$k = \frac{75}{8} \sin 1'' = [5{,}65754 - 10].$$

Werden die Beobachtungen einigermaßen symmetrisch zum Meridian vorgenommen, so ist ausreichend genau

$$\Delta z = -k T^2 \frac{n+1}{n-1} \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z_0}.$$

F. Tabellen

I. *Geozentrische Koordinaten auf der Erdoberfläche*

φ	$\varphi - \varphi'$	lg ϱ	φ	$\varphi - \varphi'$	lg ϱ
0°	0′ 0.0″	0.000000	45°	11′ 35.8″	9.999271
5	2 0.4	9.999989	50	11 25.6	9.999144
10	3 57.2	9.999956	55	10 54.6	9.999020
15	5 36.9	9.999903	60	10 3.6	9.998904
20	7 26.1	9.999830	65	8 54.2	9.998799
25	8 51.8	9.999740	70	7 28.4	9.998708
30	10 1.5	9.999637	75	5 38.9	9.998634
35	10 53.1	9.999521	80	3 58.7	9.998580
40	11 24.8	9.999398	85	2 1.2	9.998546
45	11 35.8	9.999271	90	0 0.0	9.998535

Die geozentrische Breite φ' und die geozentrische Distanz ϱ sind mit der Abplattung nach HAYFORD ($\alpha = 1 : 297$) gerechnet. Für südliche Breiten erhält $\varphi - \varphi'$ das negative Vorzeichen.

II *a. Verwandlung von mittl. Zeit in Sternzeit*

m	Δm	m	Δm	m	Δm
1h	+0m 9.86s	13h	+2m 8.13s	1m	+0.164s
2	+0 19.71	14	+2 17.99	2	+0.329
3	+0 29.57	15	+2 27.85	3	+0.493
4	+0 39.43	16	+2 37.70	4	+0.657
5	+0 49.28	17	+2 47.56	5	+0.821
6	+0 59.14	18	+2 57.42	6	+0.99
7	+1 9.00	19	+3 7.27	7	+1.15
8	+1 18.85	20	+3 17.13	8	+1.31
9	+1 28.71	21	+3 26.99	9	+1.48
10	+1 38.56	22	+3 36.84	10	+1.64
11	+1 48.42	23	+3 46.70		
12	+1 58.28	24	+3 56.56		

Sternzeit = m + Δm

Beispiel: Das mittlere Zeitintervall m = 14h 27m 10.8s = 14h 27.18m in Sternzeit zu verwandeln:

14h	Δm =	+2m 17.99s
20m		+ 3.29
7m		+ 1.15
0.1m		+ 0.016
0.04m		+ 0.007
	Δm =	+2m 22.45s
	Θ =	14h 29m 33.25s

II *b. Verwandlung von Sternzeit in mittl. Zeit*

Θ	ΔΘ	Θ	ΔΘ	Θ	ΔΘ
1h	—0m 9.83s	13h	—2m 7.78s	1m	—0.164s
2	—0 19.66	14	—2 17.61	2	—0.328
3	—0 29.49	15	—2 27.44	3	—0.491
4	—0 39.32	16	—2 37.27	4	—0.655
5	—0 49.15	17	—2 47.10	5	—0.819
6	—0 58.98	18	—2 56.93	6	—0.98
7	—1 8.81	19	—3 6.76	7	—1.15
8	—1 18.64	20	—3 16.59	8	—1.31
9	—1 28.47	21	—3 26.42	9	—1.47
10	—1 38.30	22	—3 36.25	10	—1.64
11	—1 48.13	23	—3 46.08		
12	—1 57.95	24	—3 55.91		

Mittl. Zeit = Θ + ΔΘ

Beispiel: Das Sternzeitintervall Θ = 14h 29m 33.25s = 14h 29.554m in mittl. Zeit zu verwandeln:

14h	ΔΘ =	— 2m 17.61s
20m		— 3.28
9m		— 1.47
0.5m		— 0.082
0.054m		— 0.009
	ΔΘ =	— 2m 22.45s
	m =	14h 27m 10.80s

III. Sonnenephemeride von 10 zu 10 Tagen für 1946

Datum 0h WZ		α	Δα	δ	Δδ	μ	Δμ	σ	π
Jan.	1	18h 43m 24.5s	265.2s	—23° 4′ 16″	+ 275″	— 3m 14.8s	—28.7s	16′ 17.8″	8.95″
	11	19 27 16.8	260.7	—21 55 52	+ 542	— 7 41.5	—24.2	16 17.7	8.95
	21	20 10 11.1	253.9	—20 4 54	+ 793	—11 10.2	—17.4	16 17.0	8.94
	31	20 51 51.9	246.1	—17 36 27	+ 991	—13 25.5	— 9.6	16 15.8	8.93
Febr.	10	21 32 12.2	237.9	—14 36 43	+1158	—14 20.2	— 1.4	16 14.3	8.92
	20	22 11 13.4	230.6	—11 12 39	+1284	—13 55.9	+ 6.0	16 12.4	8.90
März	2	22 49 9.0	224.8	— 7 31 1	+1369	—12 25.9	+11.7	16 10.0	8.88
	12	23 26 14.6	220.6	— 3 38 31	+1414	—10 6.0	+16.0	16 7.6	8.86
	22	0 2 48.0	218.5	+ 0 18 13	+1421	— 7 13.8	+18.1	16 4.9	8.84
April	1	0 39 11.4	218.6	+ 4 13 15	+1393	— 4 11.8	+18.0	16 2.1	8.81
	11	1 15 44.2	220.3	+ 8 0 39	+1329	— 1 19.0	+16.3	15 59.4	8.78
	21	1 52 43.1	223.8	+11 34 29	+1232	+ 1 7.6	+12.8	15 56.7	8.76
Mai	1	2 30 25.2	228.8	+14 49 24	+1102	+ 2 51.1	+ 7.8	15 54.2	8.74
	11	3 9 0.0	234.2	+17 39 56	+ 939	+ 3 41.9	+ 2.3	15 52.0	8.72
	21	3 48 30.4	239.9	+20 0 52	+ 748	+ 3 37.0	— 3.3	15 50.0	8.70
	31	4 28 55.4	244.9	+21 47 48	+ 532				
						+ 2 37.5	— 8.4	15 48.3	8.68
Juni	10	5 10 2.7	248.2	+22 57 0	+ 296	+ 0 55.8	—11.6	15 47.0	8.67
	20	5 51 33.1	249.6	+23 25 56	+ 50	— 1 9.0	—13.0	15 46.2	8.66
	30	6 33 6.6	248.7	+23 13 42	— 197	— 3 16.9	—12.2	15 45.7	8.66
Juli	10	7 14 18.7	245.4	+22 20 52	— 435	— 5 3.4	— 8.8	15 45.8	8.66
	20	7 54 49.0	240.5	+20 49 37	— 656	— 6 8.2	— 4.0	15 46.2	8.66
	30	8 34 26.5	234.8	+18 43 18	— 855	— 6 20.1	+ 1.7	15 47.1	8.67
Aug.	9	9 13 3.8	228.7	+16 6 14	—1025	— 5 31.8	+ 7.9	15 48.4	8.68
	19	9 50 42.4	223.3	+13 3 22	—1165	— 3 44.8	+13.3	15 50.1	8.69
	29	10 27 32.9	219.0	+ 9 39 44	—1274	— 1 9.8	+17.5	15 52.1	8.71

III. Sonnenephemeride von 10 zu 10 Tagen für 1946 (Fortsetzung)

Datum 0 WZ		α	$\Delta\alpha$	δ	$\Delta\delta$	μ	$\Delta\mu$	σ	π
Sept.	8	11 3 47.2	216.1	+ 6 0 43	—1349	+ 2 1.4	+20.4	15 54.4	8.73
	18	11 39 42.1	215.3	+ 2 11 49	—1393	+ 5 32.1	+21.3	15 57.0	8.76
	28	12 15 38.9	216.4	— 1 41 41	—1403	+ 9 0.8	+20.1	15 59.6	8.78
Okt.	8	12 51 56.2	219.4	— 5 33 57	—1378	+12 9.0	+17.2	16 2.4	8.81
	18	13 28 53.8	224.5	— 9 18 57	—1317	+14 36.9	+12.0	16 5.1	8.83
	28	14 6 52.2	231.3	—12 50 41	—1217	+16 4.1	+ 5.2	16 7.8	8.85
Nov.	7	14 46 4.0	239.2	—16 2 20	—1076	+16 17.8	— 2.6	16 10.3	8.88
	17	15 26 38.1	247.7	—18 47 12	— 896	+15 9.3	—11.2	16 12.5	8.90
	27	16 8 36.5	255.7	—20 58 51	— 678	+12 36.5	—19.2	16 14.4	8.92
Dez.	7	16 51 46.7	261.9	—22 31 14	— 426	+ 8 51.8	—25.4	16 16.0	8.94
	17	17 35 47.7	265.8	—23 19 48	— 154	+ 4 16.4	—29.2	16 17.1	8.94
	27	18 20 11.5	266.3	—23 21 57	+ 128	— 0 41.8	—29.8	16 17.7	8.95

α, δ: scheinbare Rektaszension und Deklination der Sonne;

μ : Zeitgleichung (wahre minus mittlere Zeit);

σ, π : scheinbarer Halbmesser und Horizontalparallaxe der Sonne.

Die Änderungen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\Delta\pi$ beziehen sich auf 24^h mittl. Zeit. Die Greenwicher Sternzeit um 0^h WZ erhält man nach der Formel

$$\overline{\vartheta} = \alpha + \mu \pm 12^h.$$

Diese Tafel gilt streng für 1946. Für andere Jahre entsprechen die Tafelwerte anderen Zeitargumenten, die sich aber von denen der ersten Spalte höchstens um einen Tag unterscheiden. Sie liefern daher auch für andere Jahre eine angenäherte Darstellung der jährlichen Sonnenbewegung.

IV. Mittlere Refraktion

z	r	$\frac{dr}{dz}$	ψ	z	r	$\frac{dr}{dz}$	ψ
0°	0′ 0.0″	0.00028	—	71.0°	2′ 47.5″	0.00259	4° 7′
10	0 10.3	0.00029	1° 23′	71.5	2 52.3	0.00272	4 14
20	0 21.2	0.00032	1 27	72.0	2 57.3	0.00286	4 20
30	0 33.6	0.00038	1 34	72.5	3 2.6	0.00302	4 27
40	0 48.9	0,00048	1 47	73.0	3 8.2	0.00318	4 34
50°	1′ 9.3″	0.00068	2° 7′	73.5	3 14.1	0.00337	4 42
51	1 11.8	0.00071	2 10	74.0	3 20.3	0.00356	4 50
52	1 14.4	0.00074	2 12	74.5	3 26.9	0.00378	4 59
53	1 17.2	0.00077	2 15	75.0	3 34.0	0.00402	5 8
54	1 20.0	0.00081	2 18	75.5	3 41.4	0.00428	5 18
55	1 23.0	0.00085	2 22	76.0	3 49.4	0.00457	5 29
56	1 26.1	0.00090	2 26	76.5	3 57.9	0.00489	5 40
57	1 29.5	0.00094	2 29	77.0	4 7.0	0.00524	5 52
58	1 33.0	0.00100	2 33	77.5	4 16.8	0.00563	6 5
59	1 36.6	0.00105	2 38	78.0	4 27.3	0.00608	6 19
60	1 40.6	0.00112	2 43	78.5	4 38.7	0.00657	6 34
61	1 44.7	0.00119	2 48	79.0	4 51.0	0.00712	6 51
62	1 49.1	0.00127	2 53	79.5	5 4.4	0.00774	7 8
63	1 53.8	0.00135	2 59	80.0	5 18.9	0.00845	7 27
64	1 58.9	0.00145	3 5	80.5	5 34.9	0.00926	7 48
65.0°	2′ 4.3″	0.00156	3° 12′	81.0	5 52.3	0.01018	8 11
65.5	2 7.1	0.00161	3 15	81.5	6 11.6	0.01127	8 37
66.0	2 10.1	0.00168	3 19	82.0	6 33.0	0.01253	9 5
66.5	2 13.2	0.00174	3 23	82.5	6 56.9	0.01399	9 36
67.0	2 16.4	0.00181	3 27	83.0	7 23.6	0.01571	10 10
67.5	2 19.7	0.00189	3 31	83.5	7 53.6	0.01775	10 49
68.0	2 23.2	0.00197	3 36	84.0	8 27.7	0.02027	11 33
68.5	2 26.8	0.00205	3 40	85°	9′ 52″	—	—
69.0	2 30.6	0.00215	3 45	86	11 45	—	—
69.5	2 34.5	0.00225	3 50	87	14 22	—	—
70.0	2 38.7	0.00235	3 56	88	18 18	—	—
70.5	2 43.0	0.00246	4 1	98	24 37	—	—
71.0	2 47.5	0.00259	4 7	90	35 24	—	—

z = scheinbare Zenitdistanz;

r = mittlere Refraktion nach Bessel, gültig für 760 mm Luftdruck und +10° C Lufttemperatur;

$\frac{dr}{dz}$ = differentielle Refraktion (siehe S. 109);

ψ ist der auf S. 186 eingeführte Winkel, durch den bei der Reduktion der Monddistanzen die Abplattung der scheinbaren Mondscheibe infolge der Refraktion gemessen wird.

Die Änderungen von $\frac{dr}{dz}$ und ψ bei abweichenden meteorologischen Bedingungen sind für nicht zu große Zenitdistanzen geringfügig und dürfen meist vernachlässigt werden.

V. *Tafeln zur logarithmischen Berechnung der Refraktion*

$$\lg r = \lg \alpha + \lg \operatorname{tg} z + A \lg B + \lambda \lg \gamma$$

a)

z	$\lg \alpha$	λ	z	$\lg \alpha$	λ	z	$\lg \alpha$	λ	A
0°	1.76156	—	66.0°	1.75897	1.0075	77° 0′	1.75229	1.0252	1.0026
10	1.76154	—	66.5	1.75884	1.0079	20	1.75180	1.0264	1.0027
20	1.76149	—	67.0	1.75871	1.0083	40	1.75129	1.0281	1.0028
30	1.76139	—	67.5	1,75857	1.0087	78 0	1.75072	1.0299	1.0030
40	1.76119	—	68.0	1.75842	1.0092	20	1.75013	1.0318	1.0031
			68.5	1.75826	1.0096	40	1.74947	1.0338	1.0033
50°	1.76082	1.0023	69.0	1.75809	1.0101	79 0	1.74876	1.0357	1.0035
51	1.76077	1.0025	69.5	1.75791	1.0106	20	1,74799	1.0377	1.0037
52	1.76071	1.0026	70.0	1.75771	1.0111	40	1.74714	1.0398	1.0039
53	1.76065	1.0027	70.5	1.75749	1.0117	80 0	1.74623	1.0420	1.0041
54	1.76058	1.0029	71.0	1.75726	1.0124	20	1.74521	1.0442	1.0043
55	1.76050	1.0031	71.5	1.75701	1.0131	40	1.74412	1.0466	1.0046
56	1.76042	1.0034	72.0	1.75675	1.0139	81 0	1.74288	1.0493	1.0049
57	1.76033	1.0037	72.5	1.75646	1.0147	20	1.74155	1.0523	1.0052
58	1.76023	1.0040	73.0	1.75615	1.0156	40	1.74007	1.0559	1.0056
59	1.76012	1.0043	73.5	1.75581	1.0165	82 0	1.73845	1.0600	1.0060
60	1.76001	1.0046	74.0	1.75543	1.0175	20	1.73663	1.0646	1.0065
61	1.75988	1.0049	74.5	1.75502	1.0186	40	1.73459	1.0697	1.0070
62	1.75973	1.0054	75.0	1.75457	1.0197	83 0	1.73229	1.0754	1.0075
63	1.75957	1.0058	75.5	1.75408	1.0208	20	1.72974	1.0815	1.0081
64	1.75939	1.0063	76.0	1.75355	1.0220	40	1.72681	1.0879	1.0088
65	1.75919	1.0068	76.5	1.75295	1.0235	84 0	1.72346	1.0951	1.0096
66	1.75897	1.0075	77.0	1.75229	1.0252				

b)

Luftdr. (mm)	lg B	Luftdr. (mm)	lg B
720	—0.01860	750	—0.00087
722	—0.01740	752	+0.00028
724	—0.01620	754	+0.00144
726	—0.01500	756	+0.00259
728	—0.01380	758	+0.00374
730	—0.01261	760	+0.00488
732	—0.01142	762	+0.00602
734	—0.01024	764	+0.00716
736	—0.00906	766	+0.00830
738	—0.00788	768	+0.00943
740	—0.00670	770	+0.01056
742	—0.00553	772	+0.01168
744	—0.00436	774	+0.01281
746	—0.00319	776	+0.01393
748	—0.00203	778	+0.01505
750	—0.00087	780	+0.01616

c)

Temp.	lg γ	Temp.	lg γ
—30°C	+0.06476	0°C	+0.01448
—28	+0.06122	+ 2	+0.01133
—26	+0.05771	+ 4	+0.00820
—24	+0.05422	+ 6	+0.00509
—22	+0.05077	+ 8	+0.00200
—20	+0.04734	+10	—0.00106
—18	+0.04394	+12	—0.00410
—16	+0.04057	+14	—0.00713
—14	+0.03722	+16	—0.01013
—12	+0.03390	+18	—0.01311
—10	+0.03060	+20	—0.01607
— 8	+0.02733	+22	—0.01901
— 6	+0.02408	+24	—0.02192
— 4	+0.02086	+26	—0.02483
— 2	+0.01766	+28	—0.02771
0	+0.01448	+30	—0.03057

lg α, λ, A werden aus Tafel a) mit dem Argument z (scheinbare Zenitdistanz) entnommen. Für $z < 50°$ kann λ, für $z < 77°$ kann A gleich 1 gesetzt werden. Aus Tafel b) wird lg B mit dem auf 0° C Quecksilbertemperatur reduzierten Barometerstand, aus Tafel c) wird lg γ mit der Lufttemperatur als Argument entnommen. Die Tafel liefert r in Bogensekunden. Die mittlere Refraktion α tg z bezieht sich auf 751.5 mm Hg und +9.3° C.

LITERATURVERZEICHNIS

ALBRECHT, Th.: Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig 1908.

AMBRONN. L., und J. DOMKE: Astronomisch-geodätische Hilfstafeln. Berlin 1909.

BESSEL, F. W.: Über die Vorausberechnung von Sternbedeckungen. Astron. Nachr. **7**, 1829.

BESSEL, F. W.: Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Monddistanzen. Astron. Nachr. **10**, 1833.

BOHNENBERGER, J. G. F.: Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich mittels des Spiegelsextanten. Göttingen 1852.

BRILL, A.: Über eine einheitliche Methode zur nautischen und astronomischen Ortsbestimmung aus Gestirnsmessungen. Ann. d. Hydr. **38**, 614, 674 (1910).

BRÜNNOW, F.: Lehrbuch der Sphärischen Astronomie. Gütersloh 1880.

CHARLIER, C. V. L.: Über geographische Ortsbestimmung in der Nähe der Pole. Astron. Nachr. **184**, 1 (1910).

COLDEWEY, H.: Ortsbestimmung im Polargebiet. Ann. d. Hydr. **53**, 345 (1925).

DOELLEN, W.: Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsinstrumentes im Verticale des Polarsternes. St. Petersburg 1863, 1874.

GAUSS, C. F.: Methodus peculiaris elevationis poli determinandi. Werke Bd. VI, pag. 37. Göttingen 1908.

GELCICH, E.: Die astronomische Bestimmung der geographischen Koordinaten. Leipzig und Wien 1904.

GRAFF, K.: Grundriß der geographischen Ortsbestimmung. Berlin 1944.

GÜSSFELDT, P.: Grundzüge der geographisch-astronomischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen. Braunschweig 1905.

HARZER, P.: Über die Zeitbestimmung im Vertikale des Polarsternes. Publ. der Sternwarte Kiel X, 1899.

HARZER, P.: Über das Dreihöhenproblem. Astron. Nachr. **192**, 107.

HARZER, P.: Über das Zweihöhenproblem. Astron. Nachr. **192**, 273.

HARZER, P.: Über das Problem der drei parallaktischen Winkel und die Verwendung des Problemes bei einer Methode der geographischen Ortsbestimmung ohne astronomische Instrumente. Astron. Nachr. **193**, 147.

HARZER, P.: Über das Problem der drei Azimute. Astron. Nachr. **193**, 195.

HARZER, P.: Über die Bestimmung der Breite und der Uhrkorrektion aus den Beobachtungen zweier Sterne an einem Universalinstrument, für das die Indexfehler beider Kreise unbekannt sind. Astron. Nachr. **212**, 173.

HARZER, P.: Über die Bestimmung der Länge aus einem Azimute oder einer Zenitdistanz des Mondes. Astron. Nachr. **214**, 123.

HINKS, A. R.: Notes on determination of position near the poles. The Geogr. Journal **35**, 299 (1910).

JORDAN, W.: Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Berlin 1885.

KRAFFT, W. L.: Essai sur la méthode de trouver la latitude sur mer par les hauteurs simultanées de deux astres. Nova acta Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae, Tome XIII, 1802.

MARCUSE, A.: Handbuch der geographischen Ortsbestimmung für Geographen und Forschungsreisende. Braunschweig 1905.

NIETHAMMER, Th.: Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung. Basel 1947.

PEWZOW, M.: Über die Bestimmung der geographischen Breite aus korrespondierenden Höhen. Schriften der kais. russ. Geographischen Gesellschaft, Teil XVII. XXXII. St. Petersburg 1888, 1899.

PLUMMER, H. C.: On the latitude problem with three relative altitudes. Astron. Nachr. **192**, 273.

SCHÜTTE, K.: Über den Einfluß der Polhöhenschwankungen auf die Länge, die Zeit und die Rektaszension. Astron. Nachr. **230**, 353 (1927).

STEWART, L. B.: The location of the pole. Journ. Can. R. A. S. **4**, 179 (1910).

STUMPFF, K.: Über das Problem der Ortsbestimmung aus drei relativen Zenitdistanzen oder Azimuten. Astron. Nachr. **277**, 145.

STUMPFF, K.: Über die Wendepunkte des Azimuts. Astron. Nachr. **277**, 229.

STUPAR, A.: Lehrbuch der astronomischen Navigation. Fiume 1908.

WEDEMEYER, A.: Astronomische Ortsbestimmung im Polargebiet. Astron. Nachr. **185**, 299 (1910).

WEDEMEYER, A.: Ortsbestimmung im Polargebiet. Ann. d. Hydr. **38**, 285 (1910).

WILKENS, A.: Über die Verallgemeinerung des Gaußschen Dreihöhenproblems. Astron. Nachr. **191**, 361.

WILKENS, A.: Neue Prinzipe und Methoden der geographischen Ortsbestimmung. Astron. Nachr. **195**, 49.

WIRTZ, C. W.: Geographische Ortsbestimmung. Enzyklopädie der math. Wiss. Bd. VI, 2, Heft 1. Leipzig 1905.

WIRTZ, C. W.: Tafeln und Formeln aus Astronomie und Geodäsie. Berlin 1918.

WIRTZ, C. W.: Allgemeine Bemerkungen zur Ortsbestimmung auf Reisen. Zeitschrift f. math. Physik **64**, 274 (1917).

WISLICENUS, W.: Handbuch der geographischen Ortsbestimmungen auf Reisen. Leipzig 1891.

ZINGER, N.: Die Zeitbestimmung aus correspondierenden Höhen verschiedener Sterne. Aus dem Russischen übersetzt von H. Kelchner. Leipzig 1877.

SACHVERZEICHNIS[1])

[1]) Stichwörter, die sehr häufig im Text vorkommen, werden im allgemeinen nur dort aufgeführt, wo sie definiert worden sind.